Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
03.11.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{2n}{n+1}$. Beweisen Sie die Konvergenz von (a_n) gegen ein a über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ finden mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

b) Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge (α_n), definiert durch $\alpha_n := \inf\{a_k : k \geqslant n\}$ monoton wachsend gegen a konvergiert.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Zeigen Sie: Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert (b^n).

b) Beweisen Sie: Ist (a_n) eine Folge, so gilt: (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

c) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := \sqrt{2}$, $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Aufgabe 16 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

b) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$.

c) $a_n = \left(\dfrac{3 + 4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

d) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

e) $a_n = \dfrac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

f) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

g) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

h) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

i) $a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

j) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},\ a, b, c \geqslant 0$.

Aufgabe 17 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über eine beliebige Folge (a_n).

a) Konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) gegen denselben Grenzwert a, so konvergiert auch (a_n) gegen a.

b) a ist ein Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

c) (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Aufgabe 18 (Tutorium)

a) Sei (a_n) eine Folge und die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}) und (a_{3k}) konvergieren. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass (a_n) konvergiert.

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) (a_n) hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.

(ii) (b_n) hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) (c_n) hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) (d_n) konvergiert gegen 2014, ist aber nicht monoton.

(v) (e_n) hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.