Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
03.11.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{2n}{n+1}$. Beweisen Sie die Konvergenz von (a_n) gegen ein a über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ finden mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

b) Sei (a_n) eine Folge, die gegen a konvergiert. Zeigen Sie, dass die Folge (α_n), definiert durch $\alpha_n := \inf\{a_k :\ k \geqslant n\}$ monoton wachsend gegen a konvergiert.

Lösungsvorschlag

a) Indem wir im Zähler und Nenner ein n ausklammern und die aus der Vorlesung bekannte Tatsache verwenden, dass $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$, sehen wir anhand der Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$a_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to 2 \qquad (n \to \infty).$$

Genauer gilt

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$

und somit $|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Wir wählen also $n_0(\varepsilon)$ als die kleinste natürliche Zahl größer $\frac{2}{\varepsilon} - 1$.

b) (α_n) ist monoton wachsend, denn wie in der Vorlesung gesehen, gilt für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dass $\inf A \geqslant \inf B$. Somit folgt

$$\alpha_{n+1} = \inf\{a_k :\ k \geqslant n+1\} \geqslant \inf\{a_k :\ k \geqslant n\} = \alpha_n$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Für die Konvergenz gegen a sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Für diese n gilt also $a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$, womit $a - \frac{\varepsilon}{2}$ eine untere und $a + \frac{\varepsilon}{2}$ eine obere Schranke der Menge $\{a_k :\ k \geqslant n\}$ ist. Deshalb gilt nach Definition

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \alpha_n = \inf\{a_k :\ k \geqslant n\} \leqslant \sup\{a_k :\ k \geqslant n\} \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2},$$

somit $|\alpha_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, womit die Konvergenz gezeigt ist.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Zeigen Sie: Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert (b^n).

b) Beweisen Sie: Ist (a_n) eine Folge, so gilt: (a_n) ist konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

c) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := \sqrt{2}$, $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösungsvorschlag

a) Nach Folgerung 4.12 (1) finden wir, da $|b| > 1$, zu jedem $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N > K$. Diese Eigenschaft reicht aus, damit $|b|^n$ (oder alternativ auch eine beliebige Folge (a_n)) divergiert, denn: Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wählen $K = |a| + 1$ und finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N > |a| + 1$. Somit gilt auch für $n \geqslant N$, dass

$$|b|^n = |b|^{n-N} |b|^N \geqslant 1 \cdot |b|^N > |a| + 1.$$

Schließlich gilt für $n \geqslant N$, dass

$$|b^n - a| \geqslant |b|^n - |a| > 1,$$

womit b^n nicht gegen a konvergieren kann, da zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ kein $n_0(\varepsilon)$ gefunden werden kann mit $|b^n - a| < \varepsilon$ für $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Da a beliebig war, divergiert (b^n).
Hinweis: Alternativ verwenden wir direkt Aufgabenteil **b)** zusammen mit Folgerung 4.12(1), um zu sehen, dass die Folge unbeschränkt, also divergent, ist.

b) Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Daraus folgt insbesondere

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

womit diese unendlich vielen Folgenglieder beschränkt sind. Übrig bleiben nur noch endlich viele Zahlen $a_1, \ldots, a_{n_0 - 1}$, die durch den Betrag ihres größten Elements beschränkt sind. Es gilt also

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\} =: C < \infty$$

und (a_n) ist beschränkt.

c) Wir zeigen zunächst per Induktion, dass die Folge monoton wachsend ist.
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$.
Induktionsschluss: Es gelte $a_{n+1} > a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \overset{IV}{>} \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1},$$

wobei die Ungleichung sich auf die Wurzel überträgt nach Lemma 4.13 und die Definition der Wurzel. Nun zeigen wir, dass die Folge nach oben beschränkt ist.
Behauptung: $|a_n| < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Da $2 < 4$ gilt nach Lemma 4.13 auch $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$.
Induktionsschluss: Es gelte $a_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{IV}{<} \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Damit ist die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, nach Vorlesung (6.3) demnach konvergent. Um den Grenzwert zu berechnen, betrachten wir die Rekursionsvorschrift und machen auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$.

$$a \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \to \sqrt{2 + a}$$

Dies bedeutet $a = \sqrt{2 + a}$. Es folgt $a^2 = 2 + a$ und somit $a = 2$ oder $a = -1$. Da $a > 0$ ((a_n) ist nach unten durch $a_1 = \sqrt{2}$ beschränkt) ist $a = 2$ der korrekte Grenzwert.

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Lösungsvorschlag

a) Unser allgemeines Polynom hat die Form

$$p(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k n^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ und einem festen $N \in \mathbb{N}_0$ (ohne Beschränkung sei $a_N \neq 0$). Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Multiplizieren wir diese Folge N mal mit sich selbst und nutzen die entsprechende Eigenschaft aus der Vorlesung zur Konvergenz von Produkten, so ergibt sich auch $\sqrt[n]{n^N} \to \infty$ für $n \to \infty$. Zudem gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$ für alle Konstanten $c \geqslant 0$. Somit ist die Behauptung bereits bewiesen, falls $a_0 = \ldots = a_{N-1} = 0$. Sei also mindestens eine dieser Zahlen nicht Null. Nun beobachten wir, dass

$$|p(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k| n^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und

$$|p(n)| \geqslant |a_N| n^N - \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^k \right| \geqslant |a_N| n^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| n^k \geqslant |a_N| n^N - \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) n^{N-1} = n^N \left(|a_N| - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right).$$

Wir wählen $n \geqslant \frac{2}{|a_N| \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|}$ (und bemerken, dass wir nicht durch Null dividieren), sodass $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \leqslant \frac{|a_N|}{2}$ und somit $|p(n)| \geqslant \frac{|a_N|}{2} n^N$ gilt. Insgesamt gilt also für jedes feste n, welches groß genug ist, dass

$$\frac{|a_N|}{2} n^N \leqslant |p(n)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und somit schließlich (wir benutzen Lemma 4.13)

$$1 = 1 \cdot 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{2}} \sqrt[n]{n^N} \leqslant \sqrt[n]{|p(n)|} \leqslant \sqrt[n]{\left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\right)} \sqrt[n]{n^N} \to 1 \cdot 1 = 1$$

für $n \to \infty$. Nach Satz 6.2(3) folgt die Behauptung.

b) Wir setzen $x = |z| - 1 > 0$. Für $n > 2k$ gilt $\frac{n}{2} > k$ und somit (addiere $\frac{n}{2}$ auf beiden Seiten und subtrahiere k) $n - k > \frac{n}{2}$. Mit dem Binomischen Satz folgt nun, dass

$$|z|^n = (1+x)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \geqslant \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > \frac{(n-k)^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1} \geqslant \frac{n^{k+1} x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!},$$

was wiederum

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leqslant \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

liefert.

Aufgabe 16 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen (a_n) auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}$.

b) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$.

c) $a_n = \left(\dfrac{3 + 4\mathrm{i}}{5}\right)^n$.

d) $a_n = \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

e) $a_n = \dfrac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

f) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

g) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

h) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

i) $a_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

j) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, $a, b, c \geqslant 0$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt nach Vorlesung, dass $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Somit folgt

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

b) Es gilt (siehe ähnliches Beispiel in der Vorlesung)

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n &= \frac{(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n)(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n)}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3} \to \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{3} \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

c) Da $|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}| = 1$ ist, können wir mit unserem bisherigen Wissen keine Aussage über das Konvergenzverhalten der Folge machen. Tatsächlich konvergiert eine Folge (b^n) mit $|b| = 1$ jedoch nur dann, wenn $b = 1$ ist. Würde die gegebene Folge konvergieren, wäre sie nach Vorlesung eine Cauchyfolge, sodass mit wachsendem n die Folgenglieder beliebig nahe beisammen liegen müssten, was insbesondere

$$|a_{n+1} - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

bedeutet. Es gilt jedoch

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5}\right|^n \left|\frac{3+4\mathrm{i}}{5} - 1\right| = 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \neq 0.$$

d) Nach dem Binomischen Satz gilt

$$\begin{aligned} a_n = \frac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}} &= \frac{\sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 2^{42-k} n^k - n^{42}}{n^{41}} = \frac{\sum_{k=0}^{41} \binom{42}{k} 2^{42-k} n^k}{n^{41}} \\ &= \binom{42}{41} 2 + \sum_{k=0}^{40} 2^{42-k} n^{k-41} \to \binom{42}{41} 2 = 84 \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

e) Wir benutzen **Aufgabe 15 b)** um zu sehen, dass

$$a_n = \frac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2} = \frac{\frac{1}{n3^n} + \frac{n^2}{3^n} - \frac{2n^3}{3^n}}{1 - \frac{4n}{3^n}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

f) Es gilt (für $n \geqslant 2$)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} \cdot (1 + \frac{1}{n-1})} \to \frac{1}{\mathrm{e} \cdot 1} = \mathrm{e}^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

g) Es gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n \cdot n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

Der Ausdruck in der Wurzel ist eine Teilfolge der Folge, die gegen e konvergiert beziehungsweise deren Folgenglieder nach Vorlesung alle zwischen 2 und 3 liegen. Damit folgt

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{2} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3} \to 1$$

für $n \to \infty$ und damit $a_n \to 1$ für $n \to \infty$ nach Satz 6.2(3).

h) Konvergente Folgen sind beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \ldots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \ldots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

i) Es gilt

$$a_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{\frac{(n+1)!}{2}\cdot(n-1)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

j) Es gilt

$$\max\{a,b,c\} = \sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leqslant \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \to \max\{a,b,c\} \qquad (n\to\infty),$$

also $a_n \to \max\{a,b,c\}$ für $n \to \infty$ nach Satz 6.2(3).

Aufgabe 17 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über eine beliebige Folge (a_n).

a) Konvergieren die beiden Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) gegen denselben Grenzwert a, so konvergiert auch (a_n) gegen a.

b) a ist ein Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

c) (a_n) ist konvergent $\Leftrightarrow$ (a_n) ist eine Cauchyfolge.

Lösungsvorschlag

a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $k_0(\varepsilon), k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant k_0(\varepsilon)$$

und

$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant k_1(\varepsilon).$$

Setze $n_0(\varepsilon) := \max\{2k_0(\varepsilon), 2k_1(\varepsilon)+1\}$ und sei $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Jedes solche n hat nun die Form $2k$ für ein $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ oder $2k+1$ für ein $k \geqslant k_1(\varepsilon)$. Deshalb gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

also $a_n \to a$ für $n \to \infty$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

b) "$\Rightarrow$": Sei a ein Häufungswert von (a_n). Wir definieren uns die geforderte Teilfolge selbst.

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} : \ |a_n - a| < 1\},$$

$$n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : \ n > n_k, |a_n - a| < \frac{1}{k+1}\} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit haben wir eine streng monoton wachsende Folge von Indizes definiert, die existiert, da wegen der Häufungswerteigenschaft von a gilt, dass nicht nur mindestens ein, sondern unendlich viele Folgenglieder beliebig nahe an a liegen, womit dies auch mit der Zusatzforderung $n_{k+1} > n_k$ noch gilt. Außerdem gilt

$$|a_{n_k} - a| \leqslant \frac{1}{k} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

"$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \qquad \forall k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Somit haben wir bereits unendlich viele Folgenglieder von (a_n) gefunden, die in $U_\varepsilon(a)$ liegen, sodass a per Definition ein Häufungswert ist.

c) "$\Rightarrow$": Sei (a_n) konvergent gegen a und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Dann gilt für $m, n \geqslant n_0(\varepsilon)$, dass

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit (a_n) eine Cauchyfolge ist.
"$\Leftarrow$": Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Es existiert ein $n_0(1) \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad \forall m, n \geqslant n_0(1).$$

Nach Satz 6.6 hat (a_n) eine monotone Teilfolge. Außerdem ist die komplette Folge, also insbesondere diese Teilfolge, beschränkt, denn für $n \geqslant n_0(1)$ gilt

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{n_0(1)}| + |a_{n_0(1)}| < 1 + |a_{n_0(1)}| =: C < \infty$$

und die restlichen, endlich vielen Folgenglieder ändern nichts an dieser Beschränktheit. Diese monotone Teilfolge, die wir (a_{n_k}) nennen, ist also konvergent gegen ein a. Es bleibt zu zeigen, dass die gesamte Folge (a_n) gegen dieses a konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m, n \geqslant n_0(\varepsilon)$$

und

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geqslant k_0(\varepsilon).$$

Nun wählen wir ein festes $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geqslant n_0(\varepsilon)$ und $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Für $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist.

Aufgabe 18 (Tutorium)

a) Sei (a_n) eine Folge und die Teilfolgen (a_{2k}), (a_{2k+1}) und (a_{3k}) konvergieren. Beweisen oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass (a_n) konvergiert.

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) (a_n) hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.

(ii) (b_n) hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) (c_n) hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) (d_n) konvergiert gegen 2014, ist aber nicht monoton.

(v) (e_n) hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Lösungsvorschlag

a) (a_n) konvergiert nach **Aufgabe 17 a)**, da die beiden Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) denselben Grenzwert haben. Hätten sie verschiedene Grenzwerte, so hätten auch die jeweiligen Teilfolgen (a_{6k}) und (a_{6k+3}) verschiedene Grenzwerte. Dies sind jedoch beides auch Teilfolgen von (a_{3k}), welches eine konvergente Folge ist, ein Widerspruch.

b) Es wird jeweils ein Beispiel genannt, von denen es noch viele mehr gibt.

(i) $a_n := (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(b_n) := (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

(iii) $c_n := (-1)^n n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $d_n := 2014 + \frac{(-1)^n}{n}$.

(v) $e_{2k} := 0$, $e_{2k+1} := k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.