

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

4. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 19 (ÜBUNG)

- a) Seien (a_n) und (b_n) reelle, beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

und finden Sie ein Beispiel um zu zeigen, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

- b) (i) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $x \in [0, 1)$ eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt, wenn man Neunerperioden ausschließt. Also: Zu jedem $x \in [0, 1)$ existiert genau eine Folge (a_n) mit

- $a_n \in \{0, \dots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \neq 9$,
- $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$.

- (ii) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist

AUFGABE 20 (TUTORIUM)

- a) Bestimmen Sie alle Häufungswerte von (a_n) und geben Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ an.

(i) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

(ii) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k - 1 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k - 2 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

- b) Seien M_1 und M_2 zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist und geben Sie dann eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $M_1 \times M_2$ an.

AUFGABE 21 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

- a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?
 b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

AUFGABE 22 (TUTORIUM)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

- a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.
- c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

AUFGABE 23 (ÜBUNG)

- a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

- b) Sei $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \text{ konvergiert} \iff q > 1.$$

AUFGABE 24 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ | i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ | j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N}, q < 1$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ | g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{4n}\right)^{-1}$ | l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ |

Modulprüfung

- Die **Modulprüfung** findet am **04.03.2015** von **8 bis 10 Uhr** statt.
- Die **Anmeldung zur Prüfung** ist ab sofort online unter <https://studium.kit.edu/Seiten/Default.aspx> möglich
- **Anmeldeschluss** ist der **15.02.2015**.
- Eine Abmeldung von der Prüfung ist bis zum 03.03.2015 (ebenfalls online) möglich.
- Die **Hörsaalverteilung** wird am **19.02.2015** auf der Webseite der Vorlesung und am schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 im Allianzgebäude bekannt gegeben.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind zwei beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter
- Die **Einsicht** findet am **15.04.2015** von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal am Fasanengarten** (Geb. 50.35) statt.