

## HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

### LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 4. ÜBUNGSBLATT

#### AUFGABE 19 (ÜBUNG)

a) Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  reelle, beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

und finden Sie ein Beispiel um zu zeigen, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

b) (i) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl  $x \in [0, 1)$  eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt, wenn man Neunerperioden ausschließt. Also: Zu jedem  $x \in [0, 1)$  existiert genau eine Folge  $(a_n)$  mit

- $a_n \in \{0, \dots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n \neq 9$ ,
- $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ .

(ii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann ist auch  $(a_n + b_n)$  beschränkt und gemäß Definition gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k + b_k : k \geq n\}.$$

Wegen  $\{a_k + b_k : k \geq n\} \subset \{a_k + b_l : k, l \geq n\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt nach Satz 4.3:  $\sup\{a_k + b_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k + b_l : k, l \geq n\}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k + b_k : k \geq n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k + b_l : k, l \geq n\} \\ &\stackrel{A7b)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup\{a_k : k \geq n\} + \sup\{b_l : l \geq n\} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k : k \geq n\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{b_l : l \geq n\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , so gilt  $a_n + b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daher ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 < 1 + 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

b) (i) Existenz: Sei  $x \in [0, 1)$ . Wir konstruieren induktiv eine Folge  $(a_n)$ , sodass

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} < 10^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

was wegen  $10^{-n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  zur Folge hat, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$  konvergiert mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = x.$$

*Induktionsanfang*: Sei  $a_1$  die größte ganze Zahl kleiner  $10x$ . Dann gilt  $a_1 \in \{0, \dots, 9\}$  und  $0 \leq 10x - a_1 < 1$ , also  $0 \leq x - a_1 10^{-1} < 10^{-1}$ .

*Induktionsschluss*: Für ein  $n \in \mathbb{N}$  seien  $a_1, \dots, a_n$  definiert und es gelte  $0 \leq x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} < 10^{-n}$  (*Induktionsvoraussetzung*). Nun sei  $a_{n+1}$  die größte ganze Zahl kleiner  $10^{n+1}(x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k})$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $a_{n+1} \in \{0, \dots, 9\}$  und außerdem

$$10^{n+1} \left( x - \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k} \right) = 10^{n+1} \left( x - \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} \right) - a_{n+1} \in [0, 1),$$

somit

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{-k} < 10^{-(n+1)}.$$

Haben wir nun eine Folge konstruiert, die ab einem (kleinsten)  $N \in \mathbb{N}$  konstant den Wert 9 annimmt, so ersetzen wir diese Folge durch die Folge  $(\tilde{a}_n)$ , definiert durch

$$\tilde{a}_n = a_n \quad (n \leq N-2), \quad \tilde{a}_{N-1} = a_{N-1} + 1, \quad \tilde{a}_n = 0 \quad (n \geq N).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{N-1} a_n 10^{-n} + 9 \sum_{n=N}^{\infty} 10^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9 \left( \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} - \sum_{n=0}^{N-1} 10^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1 - 10^{-N}}{1 - \frac{1}{10}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} - 10^{-(N-1)} + 9 \left( \frac{10^{-(N-1)}}{9} \right) = \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{a}_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n 10^{-n}. \end{aligned}$$

Wir haben also eine Folge ohne "Neunerperiode" gefunden, die als Reihenwert  $x$  ergibt. Eindeutigkeit: Sei  $x \in [0, 1)$ . Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen mit Folgengliedern in  $\{0, \dots, 9\}$ , ohne "Neunerperiode" und mit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}.$$

*Behauptung:*  $(a_n) = (b_n)$ . *Beweis:* Wir nehmen an, dass die beiden Folgen nicht übereinstimmen. Sei  $N \in \mathbb{N}$  der kleinste Index, an dem sie sich unterscheiden und ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Die beiden Summen  $\sum_{n=1}^N a_n 10^{-n}$  und  $\sum_{n=1}^N b_n 10^{-n}$  unterscheiden sich also um eine Differenz  $\geq 10^{-N}$ . Für die Differenz des Rests der Reihen gilt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) 10^{-n} < 9 \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n} = 9 \frac{10^{-(N+1)}}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-N}.$$

Die strikte Ungleichung hat ihren Ursprung darin, dass sich nicht jede Differenz  $b_n - a_n$  auf 9 belaufen kann, denn ansonsten wären all diese  $a_n = 0$  und  $b_n = 9$ , doch dies wurde ausgeschlossen. Insgesamt können die Reihen dadurch also nicht denselben Wert annehmen, ein Widerspruch.

- (ii) Zuerst stellen wir fest, dass  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist, wenn  $[0, 1)$  überabzählbar ist. Nun nehmen wir an, letzteres wäre nicht der Fall. Dann können wir alle Elemente von  $[0, 1)$  auflisten. Wir tun dies anhand der eindeutigen Dezimaldarstellung aus Teil a).

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots \\ x_2 &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots \\ x_3 &= 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots \\ x_4 &= 0.a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es reicht nun aus, ein  $x_0 \in [0, 1)$  zu konstruieren, welches nicht in dieser Liste auftaucht. Dazu definieren wir die entsprechende Folge der Dezimaldarstellung von  $x_0$  wie folgt

$$a_{0,n} = \begin{cases} 0, & a_{n,n} \neq 0 \\ 1, & a_{n,n} = 0 \end{cases}$$

Die so definierte Zahl in  $[0, 1)$  taucht nicht in der Liste auf, da sie sich an der  $n$ -ten Stelle der Dezimaldarstellung von der  $n$ -ten Zahl der Liste unterscheidet. Durch die Eindeutigkeit der Darstellung ist der Beweis erbracht und damit ein Widerspruch zur Annahme erreicht, womit  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist.

## AUFGABE 20 (TUTORIUM)

- a) Bestimmen Sie alle Häufungswerte von  $(a_n)$  und geben Sie  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  an.

(i)  $a_n = (1 + (-1)^n)^n$ .

(ii)  $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k - 1 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k - 2 & \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

- b) Seien  $M_1$  und  $M_2$  zwei abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass auch  $M_1 \times M_2$  abzählbar ist. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist und geben Sie dann eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  nach  $M_1 \times M_2$  an.

## LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) (i) Wir betrachten die zwei Teilfolgen  $(a_{2k})$  und  $(a_{2k+1})$ . Es gilt

$$a_{2k} = 2^{2k} = 4^k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty), \quad a_{2k+1} = 0$$

Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken,  $(a_n)$  somit nach oben unbeschränkt und nach unten beschränkt ist, ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

- (ii) Wir betrachten die drei Teilfolgen  $(a_{3k})$ ,  $(a_{3k-1})$  und  $(a_{3k-2})$ . Es gilt

$$a_{3k} = 1 + \frac{1}{8^k} \rightarrow 1, \quad a_{3k-1} = 2, \quad a_{3k-2} = 2 + \frac{(3k-2)+1}{3k-2} = 3 + \frac{1}{3k-2} \rightarrow 3 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Da die drei Teilfolgen die komplette Folge abdecken, ist die Folge beschränkt und der Limes Superior/Inferior der größte/kleinste Häufungswert.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 3, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- b) Die Tatsache, dass  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist, folgt mit dem Vorgehen, mit dem in der Vorlesung gezeigt wurde, dass  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist. Anstatt eine natürliche Zahl im Zähler und eine im Nenner stehen zu haben, stehen sie nun als Paar nebeneinander.

Können wir nun eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  nach  $M_1 \times M_2$  finden, dann können wir die beiden Abbildungen verknüpfen um eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $M_1 \times M_2$  (diese Abbildung ist wieder surjektiv nach AUFGABE 5).

Da  $M_1$  und  $M_2$  abzählbar sind, existieren surjektive Abbildungen  $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow M_1$  bzw.  $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow M_2$ . Definiere

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow M_1 \times M_2, \quad (m, n) \mapsto (f_1(m), f_2(n)).$$

Diese Abbildung bildet tatsächlich von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  nach  $M_1 \times M_2$  ab und ist injektiv, da wir zu  $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$  einfach  $(m, n)$  so wählen, dass  $f_1(m) = m_1$  und  $f_2(n) = m_2$  gilt, womit  $g(m, n) = (m_1, m_2)$ . Möglich ist dieses Finden von  $m$  und  $n$  wegen der Surjektivität von  $f_1$  und  $f_2$ .

## AUFGABE 21 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

- a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?  
b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

## LÖSUNGSVORSCHLAG

Sei  $a_n = \frac{(1 + \frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Betrachte die Folge  $(b_n) := \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ . Für ihre Teilfolgen  $(b_{2n})$  bzw.  $(b_{2n+1})$  gilt

$$b_{2n} = \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

$$b_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)^2 \cdot 3^{2n+2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = \infty$  gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$ . Eine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium ist also nicht möglich.

b) Betrachte die Folge  $(b_n) := \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ . Für ihre Teilfolge  $(b_{2n})$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2}}{\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

Also gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$ . Nach dem Quotientenkriterium folgt die Divergenz von  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

*Hinweis:* Tatsächlich sieht man die Divergenz auch schon daran, dass  $(a_{2k})$  divergiert und  $(a_n)$  somit keine Nullfolge ist, die Aufgabe diente nur als einfaches Beispiel dafür, dass nicht alle Kriterien dieselbe Aussage liefern müssen.

#### AUFGABE 22 (TUTORIUM)

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

- Zeigen Sie: Es gilt  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  divergent ist.
- Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Für  $n = 1$  ist  $a_n = 2 > 0$ . Für  $n > 1$  ist  $\sqrt{n} < n$  bzw.  $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Deshalb gilt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

Die Konvergenz von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0 ist klar wegen  $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  und  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

b) Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  konvergent. Wäre die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergent, so wäre auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konvergent. Aus der Vorlesung ist jedoch bekannt, dass die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent ist. Also muss die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  divergieren.

- c) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht monoton. Dies könnten wir auch relativ schnell (aber unschön) zeigen, indem wir die Differenzen  $a_{2k} - a_{2k+1}$  und  $a_{2k+1} - a_{2k+2}$  betrachten, es ist jedoch nicht nötig, denn: Wäre  $(a_n)$  monoton fallend, so wären alle Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt und  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  würde konvergieren, ein Widerspruch zu **b**).

### AUFGABE 23 (ÜBUNG)

- a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist  $(a_n)$  eine monoton fallende Folge mit  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

- b) Sei  $0 < q \in \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \text{ konvergiert} \iff q > 1.$$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Seien  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$  und  $t_n := \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$ .

Wir nehmen zunächst an, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  konvergiert. Für  $n \leq 2^i$  gilt (da  $(a_n)$  monoton fallend ist)

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^i} + \dots + a_{2^{i+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^i a_{2^i} = t_i \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , da  $(s_n)$  monoton wächst ( $a_n \geq 0$ ) und nach oben beschränkt ist.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert. Für  $n > 2^i$  gilt dann

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{i-1}+1} + \dots + a_{2^i}) \geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{i-1} a_{2^i} = \frac{1}{2} t_i.$$

Also konvergiert dann auch  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ , da  $(t_i)$  monoton wächst ( $a_n \geq 0$ ) und nach oben beschränkt ist.

- b) Mit  $a_k := \frac{1}{k^q}$  haben wir

$$2^k a_{2^k} = 2^k (2^k)^{-q} = 2^{(1-q)k}.$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{mit } x := 2^{1-q}.$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn  $|x| < 1$ , also wenn  $q > 1$ . Mit Teil **a**) konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$  also genau dann, wenn  $q > 1$ .

## AUFGABE 24 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$     | e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$                                    | i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$                     |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{2^{5n-1}}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$    | j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N},  q  < 1$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$           | g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ | k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$   |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$       | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{4n}\right)^{-1}$                   | l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$                            |

## LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Sei  $a_n := \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt (siehe **AUFGABE 16 f**)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit ist  $a_n$  keine Nullfolge und  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$  divergent.

- b) Sei  $a_n := (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$ . Es gilt

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{5} \cdot \frac{(5^2)^n}{(2^5)^n} = \frac{1}{5} \left(-\frac{25}{32}\right)^n.$$

Wegen  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[5]{5}} \frac{25}{32} \rightarrow \frac{25}{32} < 1$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}}$  konvergent. Genauer handelt es sich um eine geometrische Reihe (bis auf den fehlenden nullten Summanden) und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}} = \frac{1}{5} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{25}{32}\right)^n - 1 \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1 - (-\frac{25}{32})} - 1 \right) = -\frac{5}{57}.$$

Außerdem konvergiert die Reihe auch absolut mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{2^{5n}} = \frac{1}{5} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{25}{32}\right)^n - 1 \right) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1 - \frac{25}{32}} - 1 \right) = \frac{5}{7}.$$

- c) Sei  $a_n := \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ . Da  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ , ist  $\sqrt[n]{n}$  beschränkt, also  $\sqrt[n]{n} \leq C$  für eine Konstante  $C > 0$ . Somit folgt

$$|a_n| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \leq \frac{C}{n!}.$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n!}$  konvergiert (gegen  $C(e-1)$ , siehe Vorlesung), konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$  absolut nach dem Majorantenkriterium.

d) Sei  $a_n := \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ . Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{2n+(-1)^n} \geq \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{3n}.$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$  divergiert (als Vielfaches der harmonischen Reihe), konvergiert die Reihe nicht absolut. Es gilt allerdings  $a_n = (-1)^n b_n$  mit  $b_n = \frac{1}{2n+(-1)^n}$ . Diese Folge ist positiv und konvergiert wegen

$$\frac{1}{2n+(-1)^n} \leq \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

gegen 0. Außerdem ist sie monoton fallend wegen

$$b_{2k} - b_{2k+1} = \frac{1}{2(2k)+1} - \frac{1}{2(2k+1)-1} = 0,$$

$$b_{2k+1} - b_{2k+2} = \frac{1}{2(2k+1)-1} - \frac{1}{2(2k+2)+1} = \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} = \frac{4}{(4k+1)(4k+5)} > 0$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Ausgangsreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$  demnach.

e) Sei  $a_n := \frac{n!}{n^n}$ . Es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Deshalb konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  absolut nach dem Quotientenkriterium.

f) Sei  $a_n := \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ . Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Deshalb divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$  nach dem Wurzelkriterium.

g) Sei  $a_n := (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ . Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$  absolut.

h) Sei  $a_n := \left(\frac{5n}{4n}\right)^{-1}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{(4(n+1))!(n+1)!(5n)!}{(5(n+1))!(4n)!n!} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)} \\ &= \frac{\left(4 + \frac{4}{n}\right)\left(4 + \frac{3}{n}\right)\left(4 + \frac{2}{n}\right)\left(4 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(5 + \frac{5}{n}\right)\left(5 + \frac{4}{n}\right)\left(5 + \frac{3}{n}\right)\left(5 + \frac{2}{n}\right)\left(5 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{4^4}{5^5} < 1 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Deshalb ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{4n}\right)^{-1}$  absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

i) Sei  $a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ . Für  $n \geq 3$  gilt  $-3n+1 \leq 0$ . Daher folgt

$$a_n \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

für  $n \geq 3$ . Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$  nach dem Minorantenkriterium

j) Sei  $a_n := n^k q^n$ . Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |q| \sqrt[n]{n^k} \rightarrow |q| < 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$  absolut nach dem Wurzelkriterium.

k) Sei  $a_n := \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ . Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} > \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{4n}.$$

Deshalb divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$  - wie die harmonische Reihe - nach dem Minorantenkriterium.

l) Sei  $a_n := \frac{i^n}{n}$ . Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  konvergiert nicht absolut, da  $|a_n| = \frac{1}{n}$ . Sei  $n = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$a_{2k} = \frac{i^{2k}}{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Sei nun  $n = 2k+1$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{i^{2k+1}}{2k+1} = i \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da die beiden Folgen  $(\frac{1}{2k})$  und  $(\frac{1}{2k+1})$  monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnizkriterium und damit per Definition auch die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ .