

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

5. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 25 (ÜBUNG)

- a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

jedoch divergiert.

- b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus a) mit sich selbst divergiert.

AUFGABE 26 (TUTORIUM)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

AUFGABE 27 (ÜBUNG)

- a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf $\mathbb{R}$ bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \quad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

- b) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade ist, also

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z),$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

- c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos(x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right),$$

$$\cos(z) = \cos(x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i \sin(x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

AUFGABE 28 (TUTORIUM)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z) & \text{b)} \quad \cos(2z) = 1 - 2 \sin^2(z) = 2 \cos^2(z) - 1 \\ \text{c)} \quad \sin(z) + \sin(w) = 2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right) & \text{d)} \quad \cos(z) + \cos(w) = 2 \cos\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right) \end{array}$$

AUFGABE 29 (ÜBUNG)

a) Welche Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n & \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} \end{array}$$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0 . Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1 \\ \text{(ii)} \quad f: \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0 \end{array}$$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

AUFGABE 30 (TUTORIUM)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n & \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n \\ \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n} & \text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) z^n \\ \text{e)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2} & \text{f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} \end{array}$$