

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 5. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 25 (ÜBUNG)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

jedoch divergiert.

b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus a) mit sich selbst divergiert.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \quad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in (*).

b) Wie wir gesehen haben, ist die konvergente Reihe aus a) gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Sei nun $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \Leftrightarrow \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{1}{2}(a+b) \quad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist (c_n) keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

AUFGABE 26 (TUTORIUM)

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Der Konvergenzradius beider Potenzreihen ist 1, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Somit sind beide Reihen für $|z| < 1$ konvergent und für $|z| > 1$ divergent. Für $|z| = 1$ ist der Betrag der Folgenglieder, also n bzw. n^2 , keine Nullfolge, weshalb auch dort Divergenz folgt (siehe auch Vorlesung). Kommen wir nun zum Reihenwert, wobei ab nun $|z| < 1$ vorausgesetzt sei.

a) Es gilt (siehe Vorlesung)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Somit folgt $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$. Die geforderte Reihe müssen wir nun nur noch leicht umformen, um auf diesen nun bekannten Reihenwert zurückgreifen zu können. Wir berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \stackrel{\text{Index-Shift}}{=} z \cdot \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2 \sum_{k=0}^n k = n^2 + n \Leftrightarrow n^2 = 2 \left(\sum_{k=0}^n k \right) - n$$

Damit folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 \left(\sum_{k=0}^n k \right) - n \right) z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (z^{n-k})(kz^k) - \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^k \right) - \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

Mit Teil a) erhalten wir schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = 2 \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \left(\frac{2}{1-z} - 1 \right) = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

AUFGABE 27 (ÜBUNG)

a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf \mathbb{R} bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z), \quad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

b) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade ist, also

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z),$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos(x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right),$$

$$\cos(z) = \cos(x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - i \sin(x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf \mathbb{C} unbeschränkt sind.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Wir fangen auf der rechten Seite der ersten Gleichung an und beobachten, dass

$$\cos(z) + i \sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{i}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}) = e^{iz}.$$

Zudem gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})) = 1.$$

b) Es gilt

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}(e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin(z)$$

und

$$\cos(-z) = \frac{1}{2}(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Alternativ erkennt man diese Gleichungen auch an der Potenzreihenentwicklung, da jeweils nur ungerade beziehungsweise gerade Potenzen von z auftauchen.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y) = \frac{1}{2i}((\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} - (\cos(x) - i\sin(x))e^y) \\ &= \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \cos(x)\left(\frac{e^{-y} - e^y}{2i}\right) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y) = \frac{1}{2}((\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + (\cos(x) - i\sin(x))e^y) \\ &= \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\sin(x)\left(\frac{e^{-y} - e^y}{2}\right) = \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right).\end{aligned}$$

Für die Unbeschränktheit begeben wir uns auf die imaginäre Achse (also $x = 0$ und somit $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 1$). Es gilt für $y > 0$ (also $0 < e^{-y} < e^0 = 1 < e^y$ wegen Monotonie)

$$|\sin(iy)| = \frac{e^y - e^{-y}}{2} > \frac{e^y}{2} - \frac{1}{2},$$

$$|\cos(iy)| = \frac{e^y + e^{-y}}{2} > \frac{e^y}{2}$$

Da nach Vorlesung $\sup\{e^y : y \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $0 < e^y \leq 1$ für $y \leq 0$, gilt auch $\sup\{e^y : y > 0\} = \infty$. Somit existiert zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $y_C > 0$ mit $e^{y_C} > 2C + 1$, also $\frac{e^{y_C}}{2} > \frac{e^{y_C}}{2} - \frac{1}{2} > C$ und somit sowohl $|\sin(iy)| > C$ als auch $|\cos(iy)| > C$.

AUFGABE 28 (TUTORIUM)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$

b) $\cos(2z) = 1 - 2 \sin^2(z) = 2 \cos^2(z) - 1$

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

d) $\cos(z) + \cos(w) = 2 \cos\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Das Additionstheorem $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ liefert für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin(z)\cos(z) + \cos(z)\sin(z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ die Gleichung

$$\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos(z)\cos(z) - \sin(z)\sin(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

Wie wir in **AUFGABE 27 a)** gesehen haben, gilt die aus der Vorlesung bekannte Formel $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ auch für jedes $z \in \mathbb{C}$. Somit folgt

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = \begin{cases} (1 - \sin^2(z)) - \sin^2(z) = 1 - 2\sin^2(z), \\ \cos^2(z) - (1 - \cos^2(z)) = 2\cos^2(z) - 1. \end{cases}$$

c) Nach den bekannten Additionstheoremen und **AUFGABE 27 b)** gilt

$$\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{z \pm w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\pm\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) \\ &\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\ &\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) \\ &\stackrel{\text{a), A27a)}}{=} \sin(z) + \sin(w) \end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\ &\stackrel{\text{A27 a)}}{=} 2\left(1 - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) + \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) \stackrel{\text{b)}}{=} \cos(z) + \cos(w) \end{aligned}$$

AUFGABE 29 (ÜBUNG)

a) Welche Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n \qquad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0 . Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1$

(ii) $f: \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) (i) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n.$$

Die erste Reihe ergibt e^z , die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z} (e^z - 1).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = e^0 - 2 = -1, \quad f(z) = e^z - \frac{2e^z - 2}{z} = \frac{(z-2)e^z + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

(ii) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} = (z+1) \sin(z+1).$$

b) (i) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + (z-1)) = \sin(1) \cos(z-1) + \cos(1) \sin(z-1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (z-1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1) \frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1) \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞ .

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-(2z)}.$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3} \frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten (\rightarrow Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b + (-2a+b)z}{1-z-2z^2}.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

AUFGABE 30 (TUTORIUM)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-2i)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|e^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e, & n \text{ gerade,} \\ e^{0/2n} = 1, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1} . Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2} , d. h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n^2}|} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{|z|^{n^2}} = 2|z|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^n z^{n^2}| = 2^n \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z+3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.