

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 31 (ÜBUNG)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } x \in [-1, 0], \\ 1-x & \text{für } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0, \infty)$ bzw. $[a, \infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

AUFGABE 32 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, $x \in [a, 1]$, $0 < a < 1$,

b) $g_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, $h_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in (-1, 1]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} i_n(x)$, $i_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 33 (ÜBUNG)

a) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

$$(i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1, 3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$$

$$(ii) f: [-7, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2 + 2x - 15, x^3\} & \text{für } x \in [-7, -5] \cup [-1, 3], \\ x + 5 & \text{für } x \in (-5, -1). \end{cases}$$

AUFGABE 34 (TUTORIUM)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2},$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}, \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie für (iv) zunächst die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

$$(i) f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in [0, 1), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

$$(ii) f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

AUFGABE 35 (ÜBUNG)

Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f .
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.
- Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1} .
- Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.
- Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

AUFGABE 36 (TUTORIUM)

- Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.
- Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \geq 0$ besitzt.

- Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$