Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
17.11.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 31 (Übung)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1-x & \text{für } x \in (0,1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge (h_n) auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0,\infty)$ bzw. $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

Lösungsvorschlag

a) Für $x < -1$ gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in [N-1, N)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow b(x-n) = 0 \Leftarrow x - n < -1 \Leftarrow n > x + 1 > N.$$

Somit gilt, dass (f_n) und somit auch (g_n) auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergieren. (f_n) konvergiert jedoch nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn für jedes $\varepsilon \in (0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $x_n \in \mathbb{R}$ (nämlich $x_n := n$) mit

$$|f_n(x_n) - 0| = |f_n(n)| = |b(0)| = 1 \geqslant \varepsilon.$$

(g_n) jedoch konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g_n(x) - 0| = \left|\frac{b(x-n)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da wir den anfänglichen Betrag unabhängig von x nach oben abgeschätzt haben gegen eine Nullfolge, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz (Satz 7.18 (1)).

b) Es gilt $h_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ fest gilt

$$h_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + x} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert (h_n) punktweise gegen die Grenzfunktion

$$h(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Diese ist nicht stetig ($h(\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = h(0)$), womit die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann (Satz 8.3). Auch auf $(0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da für jedes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n > 0$ existiert (nämlich $x_n := \frac{1}{n}$) mit

$$|h_n(x_n) - 0| = \left|\frac{1}{1+1}\right| = \frac{1}{2} \geqslant \varepsilon.$$

Auf $[a, \infty)$ für $a > 0$ ist die Konvergenz jedoch gleichmäßig, denn für jedes $x \geqslant a$ gilt

$$|h_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+na} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+a} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da die letzte Folge wieder unabhängig von x ist und gegen Null konvergiert, ist die gleichmäßige Konvergenz gezeigt (Satz 7.18 (1)).

Aufgabe 32 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, $\quad x \in [a, 1]$, $0 < a < 1$,

b) $g_n(x) = nx(1-x)^n$, $\quad x \in [0, 1]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$, $h_n(x) = x^n(1-x)$, $\quad x \in (-1, 1]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} i_n(x)$, $i_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag

a) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt:

$$h_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

Also konvergiert (h_n) gegen die konstante Einsfuktion für $n \to \infty$. Da für alle $x \in [a, 1]$ sowie alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |h_n(x) - 1| &= |\sqrt[n]{n^2 x} - 1| = |\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + \sqrt[n]{n^2 a} - 1| \leq |\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a}| + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| \\ &\overset{x \geqq a}{=} \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| \overset{x \leqq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2 a} + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| =: \alpha_n \end{aligned}$$

und $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge (h_n) gleichmäßig konvergent.

Sei nun $a = 0$. Es gilt $h_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert (h_n) punktweise gegen h, wobei $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil h nicht stetig in 0 ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (Satz 8.3)

b) Offenbar gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0,1]$ ist $q := 1 - x \in [0,1)$ und es ergibt sich

$$f_n(x) = nxq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

(Wegen $\sqrt[n]{nq^n} \to q < 1$ für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe über nq^n, was dann $nq^n \to 0$ für $n \to \infty$ impliziert.) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$f_n(\tfrac{1}{n}) = n \cdot \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n})^n = (1 - \tfrac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

(vgl. **Aufgabe 16 f)**, 3. Übungsblatt). Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $f_n(\frac{1}{n}) > \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$ für $n \geqslant N$. Zu jedem $\varepsilon \in (0, \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}]$ und jedem $n \geqslant N$ existiert also ein $x_n \in (0,1]$ (nämlich $x_n := \frac{1}{n}$) mit

$$|f_n(x_n) - 0| = f_n(x_n) > \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \geqslant \varepsilon.$$

Das schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

c) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = x\,.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\Big|s_N(x) - f(x)\Big| = \Big|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\Big| = \Big|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\Big| = |-x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}\,.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\Big|\frac{1}{x^2 + n^2}\Big| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach Satz 7.18 (2): Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 33 (Übung)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15, x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, noch auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) Setze $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen begründen, dass es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

b) (i) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach einem Beispiel der Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist). Fazit: f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig.

(ii) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \leqslant 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1,0)$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5) \le 0$ und $x^3 \ge 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0,3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (punktweise nachrechnen, Betrag ist stetig nach Satz 8.1). Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5,-1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} x+5 = 4 \neq -16 = \lim_{x\to -1+} x^2+2x-15 = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

ist f in -1 unstetig. Da x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, erhält man entsprechend, dass f nicht stetig in -5 ist.

Aufgabe 34 (Tutorium)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$, (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x}$.

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ für $a,b \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie für (iv) zunächst die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in [0,1), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4.$$

(ii) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$x^3-9x^2+16x-4 = (x-2)(x^2-7x+2)$$
$$3x^3-10x^2+9x-2 = (x-2)(3x^2-4x+1).$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2} = \frac{(x-2)(x^2-7x+2)}{(x-2)(3x^2-4x+1)} = \frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2-4x+1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und gegeben ist durch

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+2}{3x^2-4x+1}=-\frac{8}{5}.$$

(iii) Setzen wir zur Abkürzung $a:=\sqrt[3]{8+x}$ und $b:=2$, so ergibt sich mit dem Hinweis die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2=a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(\sqrt[3]{8+x})^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2}=\frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}=\frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2+2\sqrt[3]{8+0}+4}=\frac{1}{12}.$$

(iv) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots}{1}=1.\end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x}=\lim_{x\to 0}1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots=1.$$

Aus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ folgt insbesondere $\sin(x)\neq 0$ in der Nähe von 0. Für jede Folge (x_n) mit $x_n\to 0$ und $x_n\neq 0$ hat man also $\sin(x_n)\to 0$ (da der Sinus stetig ist) und $\sin(x_n)\neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$, dass

$$\frac{e^{\sin x_n}-1}{\sin x_n}\xrightarrow{n\to\infty}1,\qquad\text{also}\qquad\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}.$$

b) (i) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x\in[0,1)$ stetig. Für alle $x\in[0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x^2-4)(x-1)}=\frac{1}{x-1}\cdot\left(1+\frac{3}{(x^2-4)}\right)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)}\\&=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{(x^2-4)}=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)}=\frac{x+1}{(x^2-4)}\end{aligned}$$

Folglich muss ist f für $a = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ auf ganz $[0,1]$ stetig und für $a \neq -\frac{2}{3}$ nur auf $[0,1)$.

(ii) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Sei $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ und definiere $y := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} = \sqrt{y^2+y} - \sqrt{y^2-y} = \frac{y^2+y-(y^2-y)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{y^2-y}} \\ &= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} \end{aligned}$$

Folglich ist f für $a = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$ auf ganz $[-1,1]$ stetig und für $a \neq 1$ nur auf $[-1,1] \setminus \{0\}$.

Aufgabe 35 (Übung)

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt (siehe **a)**)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geq 0}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischen-wertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : \ x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\ &\overset{1-xy\geq 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\ &\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1], \ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0, \end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leq 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f.

Aufgabe 36 (Tutorium)

a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \geqslant 0$ besitzt.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

Lösungsvorschlag

a) Sei $h := g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$, $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

b) Setze $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) := \sqrt{x}$. Beide Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil a) existiert also ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

c) Setze $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$. Dann ist g, wie f, stetig und es gilt

$$g(0) = f(1/2), \qquad g(1/2) = f(1) = f(0).$$

Gilt $f(0) = g(0)(= f(1/2))$, so ist die Behauptung gezeigt. Ansonsten ist entweder $f(0) < g(0)$ und somit $f(1/2) = g(0) > f(0) = g(1/2)$ oder umgekehrt. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus **a)**.