Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
01.12.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass Urbilder von abgeschlossener Mengen unter f wieder abgeschlossene Mengen sind.

b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler bzw. der Schnitt abzählbar vieler abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ für $a > 0$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x)}{x-1}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$, **e)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie für **e)** die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, wenn $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 39 (Übung)

a) Beweisen Sie: Gilt für die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 41 (Übung)

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geqslant 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie die folgenden Darstellungen der Areahyperbolicus-Funktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$.

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.