Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
01.12.2014

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass Urbilder von abgeschlossener Mengen unter f wieder abgeschlossene Mengen sind.

b) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler bzw. der Schnitt abzählbar vieler abgeschlossener Mengen in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge. Das Urbild von A unter f ist definiert also

$$f^{-1}(A) := \{x \in D : \ f(x) \in A\}.$$

Sei (x_n) eine Folge in $f^{-1}(A)$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x_n)$ eine Folge in A, die wegen der Stetigkeit von f den Grenzwert $f(x)$ besitzt. Da A abgeschlossen ist, ist $f(x) \in A$ und damit $x \in f^{-1}(A)$, womit $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

b) Seien $A_1, \ldots, A_N \subseteq \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ endlich viele abgeschlossene Mengen und

$$A := \bigcup_{n=1}^{N} A_n.$$

Sei nun (x_n) eine Folge in A, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gibt es mindestens ein A_n, in dem unendlich viele Folgenglieder liegen. Sei also (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n) in (ohne Beschränkung) A_1. Auch die Teilfolge konvergiert gegen x und da A_1 abgeschlossen ist, gilt $x \in A_1 \subseteq A$. Somit ist A abgeschlossen.
Seien nun $B_1, B_2, B_3, \ldots$ abzählbar viele abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}$ und

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_k := \{x \in \mathbb{R} : \ x \in B_k \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Wir nehmen uns eine Folge (x_n) in B mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ her, womit (x_n) in jedem B_k liegt. Da jedes B_k abgeschlossen ist, liegt auch x in jedem B_k und somit auch in B, womit B abgeschlossen ist.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ für $a > 0$, **b)** $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1}$, **c)** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

d) $\lim_{x\to 0}(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$, **e)** $\lim_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie für **e)** die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, wenn $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Lösungsvorschlag

a) Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x\log(a)} - 1}{x} = \log(a)\frac{e^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Da $x \to 0 \Leftrightarrow x\log(a) \to 0$ (da $\log(a)$ konstant ist) gilt dieser Grenzwert auch für obigen Bruch. Daher folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)} = \log(a).$$

b) Da $x \to 1 \Leftrightarrow \log(x) \to 0$ (eine Richtung wegen Stetigkeit des Logarithmus, andere wegen Injektivität bzw. Stetigkeit der Umkehrfunktion), gilt (mit $y := \log(x)$, also $x = e^y$), dass

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1,$$

wobei der Grenzwert sich als Kehrwert des aus der Vorlesung bekannten (und in **a)** bereits verwendeten) Grenzwertes $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ergibt.

c) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D, so gilt (mit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\alpha}.$$

Dies lässt sich direkt anhand der Definition des Grenzwertes zeigen mit Hilfe der Tatsache, dass die Exponentialfunktion bijektiv und stetig ist. Nun beobachten wir, dass per Definition

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)}.$$

Betrachten wir nun den Exponenten der rechten Seite, sehen wir, dass

$$(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = (x+1)\frac{2}{2x+1}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}} = \frac{2+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}}.$$

Der erste Bruch konvergiert für $x \to \infty$ gegen 1, der zweite ebenfalls nach **b)** ($x \to \infty \Rightarrow y := 1 + \frac{2}{2x+1} \to 1$ und im Nenner steht $y - 1$). Somit folgt insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = 1,$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^1 = e.$$

d) Wie in **c)** sehen wir, dass

$$(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(1+\arcsin(x))}$$

und

$$\frac{1}{x}\log(1+\arcsin(x)) = \frac{\arcsin(x)}{x}\frac{\log(1+\arcsin(x))}{\arcsin(x)}.$$

Der erste Bruch konvergiert gegen 1, denn mit $y = \arcsin(x)$ (x soll dabei bereits nahe genug an Null liegen, damit dieser Ausdruck definiert ist), also $x = \sin(y)$ (und somit $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$) gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)} = 1$$

nach einem Resultat der Vorlesung (bzw. dem Kehrwert). Gleichzeitig folgt für den zweiten Bruch wie in **c)** mit **b)**, dass der Grenzwert 1 ist. Ingesamt gilt also

$$\lim_{x\to 0}(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

e) Wir rechnen nach, dass für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = |\cos(x)| = \cos(x).$$

Da $\arctan(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für $x \in \mathbb{R}$, folgt

$$x\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \to 1 \quad (x\to\infty).$$

Aufgabe 39 (Übung)

a) Beweisen Sie: Gilt für die stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \le |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Lösungsvorschlag

a) Ist f die Nullfunktion, so ist die Behauptung klar. Andernfalls existiert ein x_1 mit $\varepsilon := |f(x_1)| > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \forall |x| > R.$$

Die stetige Funktion $|f|$ nimmt auf der kompakten Menge $[-R, R]$ ihr Maximum an, es existiert also ein $x_0 \in [-R, R]$ mit

$$|f(x_0)| = \max_{x\in[-R,R]}|f(x)|$$

Da $x_1 \in [-R, R]$ ist $|f(x_0)| \geqslant |f(x_1)| = \varepsilon$ und damit auch

$$|f(x_0)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

was zu beweisen war.

b) Die stetige Funktion f nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum an, das nach Voraussetzung positiv ist, also existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Damit gilt für die Funktion $\frac{1}{f}$, dass für $x \in [a, b]$

$$0 < \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x_0)} = C < \infty,$$

womit $\frac{1}{f}$ beschränkt ist.

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt mit den Additionstheoremen für den Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)})}{\cos(x)\cos(y)(1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)})} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.\end{aligned}$$

b) Nach Vorlesung gilt $\sin(x), \cos(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Durch mehrmaliges Anwenden der Additionstheoreme folgt

$$\begin{aligned}0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

Also folgt $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ und wegen $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ ergibt sich $4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, somit $\frac{1}{2} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Aus einer beliebigen der obigen Gleichungen folgt dann auch $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, also $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Weiterhin folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

und deshalb $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aufgabe 41 (Übung)

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geqslant 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie die folgenden Darstellungen der Areahyperbolicus-Funktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \operatorname{Artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Lösungsvorschlag

a) Die Polardarstellung von z lautet

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = |z|\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\,|z|\sin(\arg(z)).$$

Insbesondere gilt also $x = |z|\cos(\arg(z))$, also $\frac{x}{|z|} = \cos(\arg(z))$. Das Argument kann nun jedoch zwischen $-\pi$ und π liegen, ganz im Gegensatz zum Arkuskosinus, der nur Werte in $[0,\pi]$ annimmt. Liegt das Argument ebenfalls in diesem Bereich (nämlich für $y \geqslant 0$), folgt hiermit

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Liegt das Argument jedoch in $(-\pi, 0)$ (also für $y < 0$), so gilt $-\arg(z) \in (0,\pi)$, weshalb hier

$$\begin{aligned} \arg(z) = -(-\arg(z)) = -\arccos(\cos(-\arg(z))) = -\arccos(\cos(\arg(z))) \\ = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die Behauptung.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in \mathbb{R}$ mit $x = \sinh(y)$. Ferner ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv mit log als Umkehrfunktion. Es ist also $\log \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \operatorname{arsinh}(\sinh(y)) = y = \log(\mathrm{e}^y) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) \\ &= \log(\sinh(y) + \cosh(y)) \end{aligned}$$

Mit der Identität $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie der daraus resultierenden Tatsache $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt weiter:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \log(\sinh(y) + \cosh(y)) = \log\left(\sinh(y) + \sqrt{\cosh^2(y)}\right) \\ &= \log\left(\sinh(y) + \sqrt{1 + \sinh^2(y)}\right) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).\end{aligned}$$

Sei $x \in [1, \infty)$. Laut Vorlesung ist $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in [0, \infty)$ mit $x = \sinh(y)$. Ferner ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv mit log als Umkehrfunktion. Es ist also $\log \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh}(x) &= \operatorname{arcosh}(\cosh(y)) = y = \log(\mathrm{e}^y) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2}\right) \\ &= \log(\sinh(y) + \cosh(y))\end{aligned}$$

Mit der Identität $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie der Tatsache $\sinh(x) \geq 0$ für alle $x \geqslant 0$, folgt weiter:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh}(x) &= \log(\sinh(y) + \cosh(y)) = \log\left(\sqrt{\sinh^2(y)} + \cosh(y)\right) \\ &= \log\left(\sqrt{\cosh^2(y) - 1} + \cosh(y)\right) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).\end{aligned}$$

Sei $x \in (-1, 1)$. Laut Vorlesung ist $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv mit artanh als Umkehrfunktion. Sei also $y := \operatorname{artanh}(x)$ bzw. $\tanh(y) = x$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tanh(y)}{1-\tanh(y)}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{1 - \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\cosh(y) + \sinh(y)}{\cosh(y) - \sinh(y)}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} + \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} - \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{-y}}\right) = \frac{1}{2}\log(\mathrm{e}^{2y}) = y = \operatorname{artanh}(x)\end{aligned}$$

Aufgabe 42 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$.

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Lösungsvorschlag

a) Nach **Aufgabe 41 a)** gilt mit $z_\pm = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$, dass (wegen $|z_\pm| = 2$)

$$\arg z_\pm = \pm \arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Somit gilt

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = \left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{402\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi}.$$

Da die Exponentialfunktion $2\pi\mathrm{i}$-periodisch ist, gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi} = 1$, also

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = 1 (= 1 + \mathrm{i}\cdot 0 = 1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}).$$

b) Es gilt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$, also (mit der $2\pi\mathrm{i}$-Periodizität der Exponentialfunktion)

$$z^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

sowie

$$z^{150} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{750\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}.$$

c) Es gilt

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}) = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t-\pi}{2}},$$

wobei im letzten Schritt $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ benutzt wurde. Wegen $2\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ und $\frac{t-\pi}{2} \in (-\pi, \pi]$ für $t \in (0, 2\pi)$ ist dies bereits die Polardarstellung.