

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

8. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 43 (ÜBUNG)

- a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

- b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3$,

(ii) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$.

AUFGABE 44 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x))$,

d) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)}$,

e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

f) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x$,

g) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)}$,

h) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

i) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \tanh(x)$,

j) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|$.

AUFGABE 45 (ÜBUNG)

- a) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die durch

$$\sum_{k=1}^n (a - a_k)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a .

- b) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x - y)(x + y)e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\log(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \log(x) \right) \right)$.

AUFGABE 46 (TUTORIUM)

- a) Sei $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.
- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
- (i) $x \log(x) - y \log(y) \leq (x - y)(1 + \log(x))$ für $x > y > 0$,
 - (ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3} |x - y|$ für $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

AUFGABE 47 (ÜBUNG)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right),$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^{-1})}{\sin(x)},$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}.$

AUFGABE 48 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi},$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)},$
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan(x).$