

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 8. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 43 (ÜBUNG)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3,$

(ii) $f(x) = \text{Arsinh}(x).$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Wir stellen zunächst fest, dass f_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist. Die Produkt- und Kettenregel liefert dort

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) + x^\alpha \cdot (-1) \cos(x^{-1}) x^{-2} = x^{\alpha-2} (\alpha x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})),$$

was als Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist. Es bleibt also noch das Verhalten von f_α in Null zu bestimmen. Wir unterscheiden nach den Werten von α .

1. Fall: $\alpha \leq 0$. f_α ist hier unstetig in 0, denn für $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ gilt $\sin(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha(x_n) = \left(\frac{2}{\pi(2n+1)} \right)^\alpha (-1)^n,$$

was nicht gegen 0 konvergiert, solange $\alpha \leq 0$ gilt.

2. Fall: $0 < \alpha \leq 1$. Nun ist die Funktion in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(0)| = |x|^\alpha |\sin(x^{-1})| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1})$$

existiert nicht mit der gleichen Folge als Argument wie im 1. Fall.

3. Fall: $1 < \alpha \leq 2$. Nun ist die Funktion in 0 differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar. Es

gilt

$$f'_\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) = 0$$

wie beim Beweis der Stetigkeit im 2. Fall. Mit der Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ sehen wir jedoch, dass $\sin(x_n^{-1}) = 0$ und $\cos(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f'_\alpha(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\alpha-2} (-1)^n,$$

was wiederum nicht (und damit insbesondere nicht gegen Null) konvergiert, womit f'_α nicht stetig in 0 ist.

4. Fall: $\alpha > 2$. Hier ist f auf ganz \mathbb{R} stetig differenzierbar, da f'_α stetig in der Null ist. Mit derselben Rechnung wie im 3. Fall ist f_α in Null differenzierbar mit $f'_\alpha(0) = 0$ und für $x \neq 0$ mit $|x| \leq 1$ gilt

$$|f'_\alpha(x) - f'_\alpha(0)| \leq |x|^{\alpha-2} (\alpha |x| |\sin(x^{-1})| + |\cos(x^{-1})|) \leq |x|^{\alpha-2} (\alpha + 1) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0),$$

womit f'_α in 0 stetig ist.

b) (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Beispiel (4) nach Satz 10.4 ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0$$

gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Somit ist f auf \mathbb{R} differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(ii) Wie in **AUFGABE 41 b)** gesehen, gilt

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist Arsinh als Komposition differenzierbarer Funktionen auf \mathbb{R} differenzierbar mit

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Alternativ kann man Arsinh' auch mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen: Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differen-

zierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

wobei wir $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verwendetet haben.

AUFGABE 44 (TUTORIUM)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17,$

b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x)),$

d) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)},$

e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}},$

f) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x,$

g) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)},$

h) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x,$

i) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \tanh(x),$

j) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|.$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil j) sind als Komposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$ (siehe Beispiel (4) nach Satz 10.4)

b) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

c) Nach der Vorlesung ist \log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \quad \forall x > 1$$

d) Mit der Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$. Sei ferner $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2(\sin \circ g)$. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2 \sin(2x) e^{\sin(x)} + \cos(2x) \cos(x) e^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x) \cos(x) - 2 \sin(2x)) e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

- e) Aus der Vorlesung ist bekannt (Beispiel (7) vor Satz 10.1), dass \cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Ebenfalls laut Vorlesung (Beispiel (4) nach Satz 10.4) ist die Abbildung $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = (g \circ \cosh)'(x) = (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) = \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \sinh(x) = -\frac{\sinh(x)}{2(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}$$

- f) Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Sei $g(x) := x \log(x)$. Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes $x > 0$

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = x^x (1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x.$$

- g) Setzt man $g(x) := x^x = e^{x \log x}$ und $h(x) := g(x) \log(x)$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = e^{g(x) \log x} = e^{h(x)}$ für jedes $x > 0$. Mit f) sowie der Ketten- und Produktregel folgt für $x > 0$, dass

$$f'(x) = e^{h(x)} h'(x) = x^{(x^x)} (g'(x) \log x + g(x) x^{-1}) = x^{(x^x)} ((1 + \log x)x^x \log x + x^{x-1}).$$

- h) Sei $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{\sin(x)} = e^{\log(x) \sin(x)}$ und $h : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sin(x)^x = e^{\log(\sin(x))x}$. Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))'(x) = (\exp' \circ (\log \cdot \sin))(x) \cdot (\log \cdot \sin)'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \cdot \sin))(x) \cdot (\log' \cdot \sin + \log \cdot \sin')(x) \\ &= x^{\sin(x)} \cdot \left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x) \cos(x) \right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))'(x) = (\exp' \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot (\log \circ \sin \cdot \text{id})'(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot ((\log \circ \sin)' \cdot \text{id} + (\log \circ \sin) \cdot \text{id}')(x) \\ &= (\exp \circ (\log \circ \sin \cdot \text{id}))(x) \cdot ((\log' \circ \sin \cdot \sin') \cdot \text{id} + (\log \circ \sin))(x) \\ &= \sin(x)^x \left(\frac{x \cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g \cdot h]'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)} \sin(x)^x \left(\frac{\sin(x)}{x} + \log(x) \cos(x) + \frac{x \cos(x)}{\sin(x)} + \log(\sin(x)) \right) \end{aligned}$$

- i) Es gilt $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Mit $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ folgt anhand der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\cosh(x) \cosh(x) - \sinh(x) \sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

wobei wir zusätzlich $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

j) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben.

Weil \sin auf \mathbb{R} differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In den Punkten $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{-\sin x - (-\sin x_0)}{x - x_0} = (-\sin)'(x_0) = -\cos(x_0) = -1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k \in \mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.

AUFGABE 45 (ÜBUNG)

a) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die durch

$$\sum_{k=1}^n (a - a_k)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a .

b) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x - y)(x + y)e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\log(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \log(x) \right) \right)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Definiere hilfsweise die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Klar: g ist differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^n 2(x - a_k) = 2 \left(\sum_{k=1}^n x - \sum_{m=1}^n a_m \right) = 2nx - 2 \sum_{k=1}^n a_k = 2n \left(x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ = 0 & \text{für } x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ < 0 & \text{für } x < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \end{cases}$$

Nach Abschnitt 10.7 der Vorlesung ist g auf $(-\infty, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k]$ monoton fallend und auf $[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \infty)$ monoton wachsend. Das bedeutet: Ist $x \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, so ist $g(x) \geq g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k)$; ist $x \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, so ist $g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k) \leq g(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $g(x) \geq g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k)$.

Angenommen, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ und $g(b) = g(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k)$. O.B.d.A. ist $b > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 10.6 der Vorlesung, existiert ein $\xi \in (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Nach obiger Rechnung ist aber $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ die einzige Nullstelle von g' .

Also muss die Annahme verworfen werden und $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ ist die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g .

- b)** (i) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f: [y^2, x^2] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2, x^2]$ stetig und auf (y^2, x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2) f'(\xi) = \underbrace{(x - y)(x + y)}_{\geq 0} e^\xi \leq (x - y)(x + y) e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

- (ii) Sei $x \geq 1$. Dann ist \log auf $[x, 1 + \sqrt{1 + x^2}]$ stetig und auf $(x, 1 + \sqrt{1 + x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi_x \in (x, 1 + \sqrt{1 + x^2})$ mit:

$$\begin{aligned} x(\log(1 + \sqrt{1 + x^2}) - \log(x)) &= \frac{x}{\xi_x} (1 + \sqrt{1 + x^2} - x) = \frac{x}{\xi_x} (1 + \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{x^2}) \\ &= \frac{x}{\xi_x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen } x < \xi_x < 1 + \sqrt{1 + x^2}$$

und damit ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ nach Satz 8.6 (4). Deshalb ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\log \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) - \log(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi_x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2}} \right) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

AUFGABE 46 (TUTORIUM)

a) Sei $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, dass f sein Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $x \log(x) - y \log(y) \leq (x - y)(1 + \log(x))$ für $x > y > 0$,

(ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3} |x - y|$ für $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [-3, 2]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 8.15 der Vorlesung nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in I.$$

Nach Satz 10.5 sind x_m bzw. x_M entweder Randpunkte von I oder innere Punkte (also Elemente aus $J := (-3, 2)$) mit $f'(x) = 0$ (da f auf J differenzierbar ist). Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in J.$$

für $x \in J$. Damit folgt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47, \\ f(-\sqrt{2}) &= f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2, \\ f(0) &= 2, \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$x_m \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, f(x_m) = -2 = \min\{f(x) : x \in I\} \quad x_M = -3, f(x_M) = 47 = \max\{f(x) : x \in I\}$$

b) (i) Seien $0 < y < x$. Definiere $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t \log(t)$. Dann ist f auf $[y, x]$ stetig und auf (y, x) differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \log(t) + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \log(t)$, $t \in (y, x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$x \log(x) - y \log(y) = (x - y)f'(\xi) = (x - y)(1 + \log(\xi)) \leq (x - y)(1 + \log(x)),$$

weil $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

- (ii) Wir betrachten die Funktion $f: [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \log(\cos(t))$. Diese ist auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$. Da \tan auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$|f'(t)| \leq \sqrt{3} \quad \text{für alle } t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}].$$

Sind $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq \sqrt{3} |x - y|.$$

AUFGABE 47 (ÜBUNG)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^{-1})}{\sin(x)},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)}{\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}.$

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Für $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist

$$\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{(x - \frac{\pi}{2})\sin(x) + \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})\cos(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x).$$

Zudem ist $g'(x) = \cos(x) - (x - \frac{\pi}{2})\sin(x)$ außer in $\frac{\pi}{2}$ nur dann Null, wenn $\tan(x) = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$. Da der Tangens auf $(0, \frac{\pi}{2})$ und $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ streng monoton wachsend und $\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$ streng monoton fallend ist, kann dies in beiden Intervallen jeweils nur ein Mal der Fall sein, wodurch eine Umgebung um $\frac{\pi}{2}$ gefunden werden kann, in der $g'(x)$ (außer in $\frac{\pi}{2}$) nicht Null ist. Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + (x - \frac{\pi}{2})\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) - (x - \frac{\pi}{2})\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})\cos(x)}{\cos(x) - (x - \frac{\pi}{2})\sin(x)} =: \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert (das Argument dafür, dass $G'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von $\frac{\pi}{2}$ funktioniert analog zur Argumentation bei g')

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(x)}{-\sin(x) - \sin(x) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(x)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = 0.$$

Die Begründung, warum wir L'Hospital anwenden dürfen, erfolgt dabei rückwärts: Da $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F'(x)}{G'(x)} = 0$ ist, existiert auch $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$, weshalb auch $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert.

- b) Wir versuchen, ob wir die Regel von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler $f(x) = x^2 \cos(x^{-1})$ und Nenner $g(x) = \sin(x)$ gegen 0, aber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^{-1}) + x^2 \sin(x^{-1}) \frac{1}{x^2}}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})}{\cos(x)}$$

existiert nicht, denn für $x_n := \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi^{-1}$ hat der Bruch den Wert $\frac{(-1)^n}{\cos(x_n)}$. Die Regel von de l'Hospital ist demnach nicht anwendbar. Der Grenzwert existiert jedoch, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(x^{-1})}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot x \cos(x^{-1}) = 1 \cdot 0 = 0.$$

- c) Zähler und Nenner sind differenzierbar in $(-1, 1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Die Regel von de l'Hospital liefert (mit $f(x) := e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)$ und $g(x) := \sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2} + \sin(x) + x \cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x}.$$

Diesen Grenzwert bestimmen wir durch ein weiteres Anwenden der Regel von de l'Hospital, denn Zähler und Nenner sind wieder differenzierbar auf $(-1, 1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2} + \sin(x) + x \cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} + 2 \cos(x) - x \sin(x)}{-\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + 2} = \frac{0}{1} = 0$$

AUFGABE 48 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \quad \text{und} \quad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x \rightarrow \pi} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x)) \cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(\sin(x)) \cos(x)}{1} = -1$$

- b) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$ (siehe AUFGABE 44) ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \log(x)) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1 + \log(x))^2 + x^x \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.$$

- c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(x)}{-\sin(x)} = -1.$$