Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
07.01.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a.b]$ mit $g \geqslant 0$ oder $g \leqslant 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz berechnen Sie im Falle der Existenz den Grenzwert.

$$\text{(i)}\ \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(ii)}\ \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(iii)}\ \lim_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 56 (Tutorium)

a) Sei $a > 0$ und $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) := \int_0^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ und $G(x) := \int_x^{\sin(x)} \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils die Ableitung.

Aufgabe 57 (Übung)

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 58 (Tutorium)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3 \, dx$, **b)** $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x-1| \, dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$,

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(x) \, dx$, **e)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \, dx$, **f)** $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x(1+\log(x))} \, dx$,

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx$, **h)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx$, **i)** $\displaystyle\int_0^1 x e^{(2x^2)} \sin(e^{(x^2)}) \, dx$.

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 59 (Übung)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass sich f als Differenz zweier monoton wachsender, stetig differenzierbarer Funktionen schreiben lässt.

b) Beweisen Sie: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_a^b |f(x)| \, dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 60 (Tutorium)

Bestimmen Sie, wo möglich, die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin(x) \, dx$, **b)** $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \, dx$, **c)** $\displaystyle\int (\log(x))^2 \, dx$,

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$, **e)** $\displaystyle\int e^x \sin(ax) \, dx$, **f)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} \, dx$.