Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
07.01.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a.b]$ mit $g \geqslant 0$ oder $g \leqslant 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz berechnen Sie im Falle der Existenz den Grenzwert.

$$\text{(i)}\ \lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(iii)}\ \lim_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag

a) Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, nimmt es sein Maximum M und sein Minimum m an. Nach Satz 11.2(1) gilt also (unter der Annahme $g \geqslant 0$, der andere Fall funktioniert analog)

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert ein $K \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = K\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zu diesem K existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $K = f(\xi)$, womit die erste Behauptung folgt. Setzt man $g \equiv 1$, so folgt die zweite Behauptung mit $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$.

b) (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig ist, gibt es zu jedem $h > 0$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [a-h, a+h]$ mit

$$\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\ \mathrm{d}x = \Big((a+h)-(a-h)\Big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2).$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h>0$. Für $h\to 0+$ konvergiert ξ_h gegen a und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(a^2)$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = 2\cos(a^2).$$

(ii) Sei $a\in\mathbb{R}$ fest. Für jedes $h>\max\{0,-a\}$ (Man muss $h>-a$ fordern, damit $\log\colon [a+h,a+2h]\to\mathbb{R}$ überhaupt definiert ist.) existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h\in[a+h,a+2h]$ mit

$$\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x = ((a+2h)-(a+h))\log(\xi_h) = h\log(\xi_h).$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x = \log(\xi_h)$. Mit $h\to\infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\log(\xi_h)$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h}\int_{a+h}^{a+2h}\log(x)\,\mathrm{d}x$ für $h\to\infty$ nicht.

(iii) Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $0<\varepsilon<2$. Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann. Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi\in[0,\varepsilon/2]$ mit

$$\left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right|\,|h^\xi|\,|\cos(\xi)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h\in(0,1).$$

Für $\xi\in[\varepsilon/2,1]$ gilt $\xi\ge\varepsilon/2$. Sei nun $h>0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2}<\varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi\in[\varepsilon/2,1]$

$$\left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| \le \underbrace{(1-\varepsilon/2)}_{\le 1}|h^\xi||\cos(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen können wir abschätzen

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0+}\int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 56 (Tutorium)

a) Sei $a>0$ und $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x)=f(x)$ für alle $x\in[-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x)=-f(x)$ für alle $x\in[-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) := \int_0^{\sin(x)} \sin(e^t)\, dt$ und $G(x) := \int_x^{\sin(x)} \sin(e^t)\, dt$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils die Ableitung.

Lösungsvorschlag

a) Nach 11.6(1) gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

Für das erste Integral nutzen wir die Substitution $y(x) = -x$. In der Schreibweise der Merkregel aus der Vorlesung gilt nun $\frac{dy}{dx} = -1$, also $dx = -dy$. Außerdem gilt $y(-a) = a$, $y(0) = 0$. Nach der Substitutionsregel folgt demnach

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-x)(-1) dy = \int_{0}^{a} f(-x)\, dx = \begin{cases} \int_0^a f(x)\, dx, & f \text{ gerade,} \\ -\int_0^a f(x)\, dx, & f \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dies liefert die Behauptung.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \sin(e^t)\, dt,$$

ist nach de Hauptsatz (11.9) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = \sin(e^x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da der Integrand stetig ist. mit $g(x) := \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun $F(x) = f(g(x))$ und $G(x) = f(g(x)) - f(x)$, somit folgt mit den üblichen Rechenregeln zur Differentiation, dass F und G differenzierbar sind mit

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \sin(e^{\sin(x)}) \cos(x)$$

und

$$G'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) - f'(x) = \sin(e^{\sin(x)}) \cos(x) - \sin(e^x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 57 (Übung)

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)\, dx$ ($n \in \mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\, dx = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen

$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{=:u(x)}\underbrace{\cos(x)}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} \cos^{n-1}(x)\sin(x) - (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bringen wir den letzten Summanden auf die linke Seite und dividieren durch n, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da der erste Term für die Grenzen 0 und $\pi/2$ entfällt für $n \geqslant 2$, ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}$$

sowie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)+1}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=\sin(\pi/2)-\sin(0)=1} = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

b) Definieren wir

$$c_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(x)\,\mathrm{d}x,$$

so folgt

$$w_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}} = \frac{\pi}{2}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$$

Wegen $\cos(x) \in [0,1]$ für $x \in [0, \pi/2]$ folgt $\cos^{2n}(x) \geqslant \cos^{2n+1} \geqslant \cos^{2n+2}(x)$ auf diesem Intervall, was wegen der Monotonie des Integrals $c_{2n} \geqslant c_{2n+1} \geqslant c_{2n+2}$ liefert. Deshalb folgt

$$1 \geqslant \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geqslant \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

was nach dem Sandwichprinzip für Folgen die Behauptung liefert.

Aufgabe 58 (Tutorium)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3 \, dx,$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1| \, dx,$ **c)** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(x) \, dx,$ **e)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \, dx,$ **f)** $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} \, dx,$

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right) dx,$ **h)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx,$ **i)** $\displaystyle\int_0^1 x e^{(2x^2)} \sin(e^{(x^2)}) \, dx.$

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösungsvorschlag

a) Entweder wir erkennen direkt die Funktion $x \mapsto \frac{1}{8}(1+2x)^4$ als Stammfunktion des Integranden, oder wir nutzen die Substitution $y(x) = 1+2x$ (also $\frac{dy}{dx} = 2$, was $dy = \frac{1}{2}dx$ liefert, sowie $y(0) = 1$, $y(1) = 3$). Damit folgt

$$\int_0^1 (1+2x)^3 \, dx = \frac{1}{2}\int_1^3 y^3 \, dy = \frac{1}{8}y^4\Big|_1^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

b) Wir teilen das Integral auf, um den Betrag aufzulösen. Es gilt

$$\int_{-2}^2 |x-1| \, dx = \int_{-2}^1 1-x \, dx + \int_1^2 x-1 \, dx = \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 5.$$

c) Mit der Substitution $y(x) = \arcsin(x)$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dy$, sowie $y(0) = 0$, $y(1/2) = \pi/6$. Es folgt

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\pi/6} y \, dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{72}$$

d) Mit $y(x) = \sin(x)$ gilt $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, also $\cos(x)dx = dy$, sowie $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Es folgt

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(x) \, dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} y \, dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

e) Mit $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dy$, sowie $y(1) = 1$, $y(4) = 2$. Es folgt

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \, dx = 2\int_1^2 \frac{1}{1+y} \, dy = 2\log(1+y)\Big|_1^2 = \log(3) - \log(2) = 2\log(3/2).$$

f) Mit $y(x) = \log x$ gilt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, also $\frac{1}{x}dx = dy$, sowie $y(1) = 0$, $y(e) = 1$. Es folgt

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\log(x))} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y} \, dy = \log(1+y)\Big|_0^1 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

g) Mit $y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ gilt $\sqrt{x} = y(x)^2 + 1$ sowie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{4(y^2+1)y}$, also $\mathrm{d}x = 4y(y^2+1)\mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 0$, $y(4) = 1$. Es folgt

$$\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{x}-1})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4y^3 + 4y)\arctan(y)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral berechnen wir mit Hilfe partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{(4x^3+4x)}_{=:v'(x)}\cdot\underbrace{\arctan(x)}_{u(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{P.I.}{=} (x^4+2x^2)\arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 (1+x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3\pi}{4} - (x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

h) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \underbrace{x^2}_{=:u(x)} \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{P.I.}{=} -\frac{x^2}{(1+x^2)^{1/2}}\Big|_1^2 + 2\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2(1+x^2)^{1/2}\Big|_1^2 = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

i) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})$ eine Stammfunktion von $x \mapsto x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x^2}\sin(\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{\mathrm{e}^{(x^2)}}_{=:u(x)}\cdot\underbrace{x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{P.I.}{=} -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\mathrm{e}^{(x^2)}\Big|_0^1 + \int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2)}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e})\mathrm{e} + \frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\cos(1) - \sin(1) + \sin(\mathrm{e}) - \mathrm{e}\cos(\mathrm{e})).\end{aligned}$$

Aufgabe 59 (Übung)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass sich f als Differenz zweier monoton wachsender, stetig differenzierbarer Funktionen schreiben lässt.

b) Beweisen Sie: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Lösungsvorschlag

a) Für ein festes $a \in I$ und jedes $x \in I$ definieren wir

$$f_1(x) := \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad f_2(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t - f(x).$$

Diese Funktionen sind wohldefiniert, da die Funktion $t \mapsto |f'(t)|$ stetig auf dem Intervall $\langle a, x\rangle$ ist für alle $x \in I$. Außerdem ist klar, dass $f = f_1 - f_2$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass f_1 und f_2 monoton wachsend sind. Nach dem Hauptsatz (11.9) gilt

$$f_1'(x) = |f'(x)| \geqslant 0, \qquad f_2'(x) = |f'(x)| - f'(x) \geqslant 0,$$

womit die Behauptung aus Folgerung 10.7 folgt.

b) Wir nehmen an, dass $f(x) \neq 0$ für ein $x \in [a,b]$. Insbesondere gilt dies auch für ein $x_0 \in (a,b)$: Sind $f(a) = f(b) = 0$, so ist dies klar, ansonsten sei o.B.d.A. $f(a) \neq 0$. Dann ist entweder $f(\frac{b+a}{2}) \neq 0$ (dann wähle $x_0 = \frac{b+a}{2}$) oder $f(\frac{b+a}{2}) = 0$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in (a, \frac{b+a}{2})$ mit $f(x_0) = \frac{f(a)}{2} \neq 0$. Setze $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a,b]$ (da x_0 ein innerer Punkt von $[a,b]$ ist) und

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Insbesondere gilt für diese x

$$|f(x)| = |f(x_0) - (f(x_0) - f(x))| \geqslant |f(x_0)| - |f(x_0) - f(x)| = \varepsilon - |f(x_0) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen der Monotonie des Integrals folgt nun

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{x_0-\delta} 0\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} 0\,\mathrm{d}x = 2\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \delta\varepsilon > 0,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung, womit die Annahme falsch ist und die Behauptung folgt.

Aufgabe 60 (Tutorium)

Bestimmen Sie, wo möglich, die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$, **b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, **c)** $\displaystyle\int (\log(x))^2\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$, **e)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(ax)\,\mathrm{d}x$, **f)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag

a) Mit partieller Integration folgt

$$\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \int \underbrace{\arcsin(x)}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

für $x \in (-1,1)$.

b) Mit der Substitution $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$. Somit folgt

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\sqrt{x}}.$$

Das letzte Integral berechnen wir über partielle Integration. Es gilt

$$\int \underbrace{y}_{=:u(x)} \underbrace{e^y}_{=:v'(x)} \, dy \overset{P.I.}{=} ye^y - \int e^y \, dy = ye^y - e^y + C = (y-1)e^y + C.$$

Somit folgt insgesamt

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$$

für $x > 0$.

c) Nach der Vorlesung (Vorgehen analog zu **a)**) ist eine Stammfunktion von log gegeben durch $x \mapsto x\log(x) - x$. Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}\int (\log(x))^2 \, dx &= \int \log(x)\log(x) \, dx \overset{P.I.}{=} \log(x)(x\log(x) - x) - \int \log(x) - 1 \, dx \\ &= \log(x)(x\log(x) - x) - (x\log(x) - x - x) + C = x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C\end{aligned}$$

für $x > 0$. Alternativ können wir auch $y(x) = \log(x)$ substituieren und das so entstehende Integral über y^2e^y mit partieller Integration berechnen.

d) Für $x \in (-1,1)$ folgt mit partieller Integration, dass

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \underbrace{(1-x)}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=:v'(x)} \, dx = (1-x)\arcsin(x) + \int \arcsin(x) \, dx$$

Mit **a)** folgt demnach

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = (1-x)\arcsin(x) + x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

e) Mit zweimaliger partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{=:v'(x)} \underbrace{\sin(ax)}_{=:u(x)} \, dx &\overset{P.I.}{=} e^x \sin(ax) - a \int \underbrace{e^x}_{=:v'(x)} \underbrace{\cos(ax)}_{=:u(x)} \, dx \\ &\overset{P.I.}{=} e^x \sin(ax) - ae^x\cos(ax) - a^2 \int e^x \sin(ax) \, dx.\end{aligned}$$

Addieren wir auf beiden Seiten das letzte Integral und dividieren durch $1 + a^2$, so erhalten wir

$$\int e^x \sin(ax) \, dx = \frac{e^x}{1+a^2}(\sin(ax) - a\cos(ax)) + C$$

für $x \in \mathbb{R}$.

f) Es gilt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} \, dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} \, dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2}+1)^2 + 1} \, dx.$$

Im erste Integral erkennen wir im Zähler die Ableitung des Nenners, weswegen eine Stammfunktion durch $x \mapsto \log(x^2+4x+8)$ gegeben ist (eine Substitution $y(x) = x^2+4x+8$ macht dies deutlich). Im zweiten Integral substituieren wir $y(x) = \frac{x}{2}+1$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}$, also $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$. Somit folgt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x = \log(x^2+4x+8)+C-\frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\frac{x}{2}+1} = \log(x^2+4x+8)-\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right)+C.$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Anmerkung: Der Ausdruck x^2+4x+8 ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Stünde im Nenner des ersten Integrals ein Ausdruck, der (auch) negativ sein kann, so müsste man die Nullstellen für die Stammfunktion natürlich ausschließen und die Stammfunktion in den restlichen Punkten wäre durch den Logarithmus des Betrags gegeben, wie man anhand einer Fallunterscheidung erkennt.