

## HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

### LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 11. ÜBUNGSBLATT

#### AUFGABE 61 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y(x) + x, \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1.$$

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  und  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x$ . Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^x a(s) ds = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds = \left[ \sqrt{1+s^2} \right]_{s=0}^{s=x} = \sqrt{1+x^2} - 1$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{-A(s)}b(s) ds &= \int_0^x e^{-\sqrt{1+s^2}+1} s ds = - \int_0^x \sqrt{1+s^2} \cdot \left( -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \right) e^{-\sqrt{1+s^2}+1} ds \\ &\stackrel{P.I.}{=} - \left[ \sqrt{1+s^2} e^{-\sqrt{1+s^2}+1} \right]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} e^{-\sqrt{1+s^2}+1} ds \\ &= -\sqrt{1+x^2} e^{-\sqrt{1+x^2}+1} + 1 - \left[ e^{-\sqrt{1+s^2}+1} \right]_{s=0}^{s=x} = 2 - (\sqrt{1+x^2} + 1) e^{-\sqrt{1+x^2}+1} \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach dem Satz aus Abschnitt 12.1 der Vorlesung ist  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(s)}b(s) ds = 3e^{\sqrt{1+x^2}-1} - \sqrt{1+x^2} - 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

#### AUFGABE 62 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a)  $y'(x) = 2xy(x) + x^3, \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = \frac{1}{2}.$

b)  $y'(x) = \frac{x^2 - 4xy(x)}{1+x^2}, \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1.$

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto 2x$  und  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x^3$ .

Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^x a(s) \, ds = \int_0^x 2s \, ds = [s^2]_{s=0}^{s=x} = x^2$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{-A(s)} b(s) \, ds &= \int_0^x s^3 e^{-s^2} \, ds = -\frac{1}{2} \int_0^x s^2 \cdot (-2s) e^{-s^2} \, ds \stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{2} [s^2 e^{-s^2}]_{s=0}^{s=x} - \frac{1}{2} \int_0^x (-2s) e^{-s^2} \, ds \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} [e^{-s^2}]_{s=0}^{s=x} = \frac{1}{2} - \frac{(1+x^2)e^{-x^2}}{2} \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(s)} b(s) \, ds = e^{x^2} - \frac{1+x^2}{2}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

- b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des Satzes 12.1 sei  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto -\frac{4x}{1+x^2}$  und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ . Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^x a(s) \, ds = -\int_0^x \frac{4s}{1+s^2} \, ds = -2 [\log(1+s^2)]_{s=0}^{s=x} = -2 \log(1+x^2) = \log\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{-A(s)} b(s) \, ds &= \int_0^x e^{-\log\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)} \frac{s^2}{1+s^2} \, ds = \int_0^x (1+s^2)^2 \frac{s^2}{1+s^2} \, ds = \int_0^x s^2 + s^4 \, ds \\ &= \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} \right]_{s=0}^{s=x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Nach der Bemerkung nach Satz 12.1 der Vorlesung ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(x) = u_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x e^{-A(s)} b(s) \, ds = \frac{1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}{(1+x^2)^2}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

### AUFGABE 63 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = x e^{-x} y^2(x), \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1.$$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $J = (0, \infty)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x e^{-x}$ , und

$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y \mapsto y^2$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x s e^{-s} \, ds$$

$$\stackrel{P.I.}{=} [-s e^{-s}]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x e^{-s} \, ds = [-s e^{-s} - e^{-s}]_{s=0}^{s=x} = 1 - (1+x)e^{-x}$$

für alle  $x \in I$ . Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_1^y \frac{1}{s^2} \, ds = 1 - \frac{1}{y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist und  $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0, \infty)$ , also  $I_{x_0} = (-1, \infty)$ . Da  $y$  in  $-1$  nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

#### AUFGABE 64 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a)  $y'(x) = e^{y(x)} \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = y_0 = -\log(3)$ .

b)  $y'(x) = -\frac{x^2}{y^3(x)}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y(x_0) = y_0 = \sqrt{2}$ .

#### LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.2, sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $J = \mathbb{R}$ ,  $f = \sin$  und  $g = \exp$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x \sin(s) \, ds = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_{-\log(3)}^y e^{-s} \, ds = 3 - e^{-y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = -\log(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist, also  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ , was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto -x^2$  und  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y \mapsto \frac{1}{y^3}$ . Wegen  $u_0 = \sqrt{2}$  bietet es sich an,  $J = \mathbb{R}^+$  zu wählen (das größte

Intervall, welches  $y_0$  enthält und auf dem  $g$  das Vorzeichen von  $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$  hat). Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x -s^2 \, ds = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_{\sqrt{2}}^y y^3 \, ds = \frac{y^4}{4} - 1$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = \sqrt{2} \sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von  $y$  durch  $y_0 = \sqrt{2}$  festgelegt ist. Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist, also  $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$ . Da  $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$  und 0 nicht im Definitionsbereich von  $g$  liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden.

### AUFGABE 65 (ÜBUNG)

Seien  $\gamma, \omega_0 > 0$  mit  $\omega_0 > \gamma$ . Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin(\omega_0 x), \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1, y'(x_0) = y_1 = 0.$$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{<0} = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=: \omega}$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-\gamma x} \cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x} \sin(\omega x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega^2 y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität  $m = 0$ ,  $\alpha = 0$  und  $\beta = \omega_0$ . Da  $i\omega_0$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= \omega_0(-A \sin(\omega_0 x) + B \cos(\omega_0 x)) \\y_p''(x) &= \omega_0^2(-A \cos(\omega_0 x) - B \sin(\omega_0 x))\end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}y_p''(x) + 2\gamma y_p'(x) + \omega_0^2 y_p(x) &= (-A\omega_0^2 + B2\gamma\omega_0 + A\omega_0^2)\cos(\omega_0 x) + (-B\omega_0^2 - A2\gamma\omega_0 + B\omega_0^2)\sin(\omega_0 x) \\&= 2\gamma\omega_0 B \cos(\omega_0 x) - 2\gamma\omega_0 A \sin(\omega_0 x) \\&\stackrel{!}{=} \sin(\omega_0 x)\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für  $B = 0$  und  $A = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}$  erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = -\frac{1}{2\gamma\omega_0} \cos(\omega_0 x)$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\gamma x} \cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x} \sin(\omega x) - \frac{1}{2\gamma\omega_0} \cos(\omega_0 x)$$

gegeben, wobei die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$c_1 - \frac{1}{2\gamma\omega_0} = y(0) \stackrel{!}{=} y_0 = 1,$$

also  $c_1 = 1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}$ , und wegen

$$y'(x) = -\gamma e^{-\gamma x} \cos(\omega x) - \omega e^{-\gamma x} \sin(\omega x) - c_2 \gamma e^{-\gamma x} \sin(\omega x) + c_2 \omega e^{-\gamma x} \cos(\omega x) + \frac{1}{2\gamma} \sin(\omega_0 x)$$

ist

$$-c_1 \gamma + c_2 \omega = y'(0) \stackrel{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1 \gamma}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left( \gamma + \frac{1}{2\omega_0} \right)$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \left( 1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0} \right) e^{-\gamma x} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x\right) + \frac{1}{\omega} \left( \gamma + \frac{1}{2\omega_0} \right) e^{-\gamma x} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x\right) - \frac{1}{2\gamma\omega_0} \cos(\omega_0 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### AUFGABE 66 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2x}, \quad x_0 = 0, y(x_0) = y_0 = 1, y'(x_0) = y_1 = 0.$$

### LÖSUNGSVORSCHLAG

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

In der Notation der Vorlesung (nach Satz 12.5) gilt für unsere Inhomogenität  $m = 0$ ,  $\alpha = 2$  und  $\beta = 0$ . Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A e^{2x}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2A e^{2x}, \\ y_p''(x) &= 4A e^{2x} \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 4A e^{2x} + 2 \cdot 2A e^{2x} + A e^{2x} = 9A e^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für  $A = \frac{1}{9}$  erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{9} e^{2x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x}$$

gegeben, wobei die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$y'(x) = -\frac{8}{9} e^{-x} - c_2 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + \frac{2}{9} e^{2x}$$

ist

$$y'(0) = -\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = c_2 - \frac{6}{9} \stackrel{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \frac{8}{9} e^{-x} + \frac{6}{9} x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$