Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
19.01.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

b) Berechnen Sie, falls existent, den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 68 (Tutorium)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x \cos(x), \quad y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 0.$$

Aufgabe 69 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,dx$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Aufgabe 70 (Tutorium)

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Berechnen Sie $I_0(1)$, finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für $I_n(1)$ und folgern Sie schließlich den Wert von $I_n(\lambda)$ aus demjenigen von $I_n(1)$ mit Hilfe einer Substitution.

Aufgabe 71 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{st} \cos(tx)\, dt,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t \log(t)}{\sinh(t) - t}\, dt.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t - t^2}}\, dt,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \log(1+t)\, dt.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log \log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Aufgabe 72 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1 + e^t}\, dt,$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \log(|t|)\, dt.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\, dt,$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.