Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
19.01.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

b) Berechnen Sie, falls existent, den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen das Wurzelkriterium: Wegen

$$\sqrt[n]{|n(n+3)\mathrm{e}^{nx}|} = \sqrt[n]{n(n+3)}\,\mathrm{e}^x \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^x$$

gilt: Für $\mathrm{e}^x < 1$ konvergiert die Reihe, für $\mathrm{e}^x > 1$ divergiert sie. Das bedeutet: Für $x < 0$ liegt Konvergenz, für $x > 0$ Divergenz vor. Für $x = 0$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\cdot 1$, da $n(n+3) \not\to 0$. Insgesamt: Genau für $x < 0$ konvergiert die Reihe.

Nun sei $x < 0$. Wir setzen $y := \mathrm{e}^x$ und wollen

$$f(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^n = y\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)y^{n-1}$$

berechnen. Offenbar besitzt $g(y) := f(y)/y$ die Stammfunktion

$$G(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^n = \frac{1}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)y^{n+2}.$$

Nun hat wiederum $h(y) := y^2G(y)$ die Stammfunktion

$$H(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n+3} \overset{k:=n-1}{=} y^4\sum_{k=0}^{\infty} y^k \overset{|y|<1}{=} \frac{y^4}{1-y}.$$

Daraus ergibt sich

$$h(y) = H'(y) = \frac{4y^3(1-y)+y^4}{(1-y)^2} = \frac{4y^3-3y^4}{(1-y)^2}, \qquad G(y) = \frac{h(y)}{y^2} = \frac{4y-3y^2}{(1-y)^2}.$$

Also ist

$$g(y) = G'(y) = \frac{(4-6y)(1-y)^2+(4y-3y^2)2(1-y)}{(1-y)^4} = \frac{4-2y}{(1-y)^3}.$$

Schließlich ergibt sich dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)\mathrm{e}^{nx} = f(y) = yg(y) = \frac{4y-2y^2}{(1-y)^3} = \frac{4\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}}{(1-\mathrm{e}^x)^3}.$$

b) Nach Aufgabe 32 **d)** ist die Funktionenreihe im Integranden gleichmäßig konvergent. Die Summanden sind stetig und somit Riemann-integrierbar auf $[0,1]$, weshalb wegen Satz 13.1 gilt, dass

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{n})^2+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[\arctan(x/n)]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(1/n)}{n}\end{aligned}$$

und die letzte Reihe konvergent ist.

Aufgabe 68 (Tutorium)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem.

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x\cos(x), \quad y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 0.$$

Lösungsvorschlag

Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, welche als Nullstellen $1 \pm \mathrm{i}$ besitzt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist demnach gegeben durch

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^x\cos(x) + c_2\mathrm{e}^x\sin(x).$$

Die rechte Seite hat die Form $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ mit $\alpha = \beta = 1$. Da $\alpha + \mathrm{i}\beta$ somit eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der korrekte Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \mathrm{e}^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x)).$$

Es ergibt sich

$$y_p'(x) = y_p(x) + \mathrm{e}^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x))$$

sowie

$$
\begin{aligned}
y_p''(x) &= y_p'(x) + e^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) \\
&\quad + e^x(-A\sin(x) + B\cos(x) - A\sin(x) + B\cos(x) + Ax\cos(x) - Bx\sin(x)) \\
&= y_p'(x) + e^x(A\cos(x) + B\sin(x) - Ax\sin(x) + Bx\cos(x)) + 2e^x(B\cos(x) - A\sin(x)) \\
&\quad + \underbrace{e^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x))}_{y_p(x)} - 2Bxe^x\sin(x) \\
&= 2y'(p) + 2e^x(B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bxe^x\sin(x)
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies in die inhomogene Differentialgleichung ein, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= 2e^x(B\cos(x) - A\sin(x)) - 2Bxe^x\sin(x) + 2e^x(Ax\cos(x) + Bx\sin(x)) \\
&= 2Be^x\cos(x) - 2Ae^x\sin(x) + 2Axe^x\cos(x) \stackrel{!}{=} e^x\cos(x).
\end{aligned}
$$

Somit gilt $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\sin(x) + \frac{1}{2}xe^x\sin(x).$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$0 \stackrel{!}{=} y(\pi/2) = c_2e^{\pi/2} + \frac{\pi}{4}e^{\pi/2},$$

also $c_2 = -\frac{\pi}{4}$. Wegen

$$y'(x) = e^x\sin(x)\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - c_1\right) + e^x\cos(x)\left(\frac{\pi}{4} + c_1\right) + \frac{1}{2}xe^x(\sin(x) + \cos(x))$$

folgt schließlich

$$0 \stackrel{!}{=} y'(\pi/2) = e^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - c_1\right) + \frac{\pi}{4}e^{\pi/2},$$

also $c_1 = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x\cos(x) - \frac{\pi}{4}e^x\sin(x) + \frac{1}{2}xe^x\sin(x) = \frac{e^x}{2}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin(x) + \cos(x)\right).$$

Aufgabe 69 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,dx$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Lösungsvorschlag

1. Fall: $s < 0$. Für jedes $x \geq 1$ gilt $x^s \leq x^0 = 1$ und $x^{1/s} \leq x^0 = 1$, so dass $\frac{1}{x^s + x^{1/s}} \geq \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Divergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{2}\,dx$ liefert das Minorantenkriterium die Divergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,dx$. Infolgedessen ist I_s divergent.

2. Fall: $s \in (0,1)$. Wir zeigen, dass sowohl $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ als auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ konvergieren. Hieraus folgt dann die Konvergenz von I_s.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \le \frac{1}{x^s}$. Da $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ gemäß Beispiel (1) nach Definition 2 in Paragraph 13 konvergiert, ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{1}{x^s+x^{1/s}} \le \frac{1}{x^{1/s}}$. Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ wegen $1/s > 1$ konvergiert (vgl. Beispiel (1)), ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^s+x^{1/s}}\,\mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

3. Fall: $s = 1$. $I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ ist divergent (vgl. Beispiel (1)).

4. Fall: $s > 1$. Ist $q := 1/s$ gesetzt, so gilt $q \in (0,1)$. Daher konvergiert laut Fall 2

$$I_q = \int_0^\infty \frac{1}{x^q + x^{1/q}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/s} + x^s}\,\mathrm{d}x = I_s\,.$$

Fazit: I_s ist genau dann konvergent, wenn $s > 0$ und $s \ne 1$ gilt.

Aufgabe 70 (Tutorium)

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Berechnen Sie $I_0(1)$, finden Sie dann mit partieller Integration eine Rekursionsformel für $I_n(1)$ und folgern Sie schließlich den Wert von $I_n(\lambda)$ aus demjenigen von $I_n(1)$ mit Hilfe einer Substitution.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert 1 ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -\mathrm{e}^{-R} + \mathrm{e}^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $u(x) = x^n$ und $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left(\Big[x^n(-\mathrm{e}^{-x})\Big]_{x=0}^R - \int_0^R n x^{n-1}(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n \mathrm{e}^{-R} + n I_{n-1}(1) = n I_{n-1}(1)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
IA: $n = 0$. Zu Beginn haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1) I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\, dx$ auf

$$\begin{aligned}
I_n(\lambda) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n \mathrm{e}^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n \mathrm{e}^{-y}\, dy \\
&= \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 71 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{st} \cos(tx)\, \mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\, \mathrm{d}t.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\, \mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \log(1+t)\, \mathrm{d}t.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \underbrace{\mathrm{e}^{st}}_{u'(t)} \underbrace{\cos(tx)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}\Big[\mathrm{e}^{st}\cos(tx)\Big]_{t=0}^{t=b} + \frac{x}{s}\int_0^b \underbrace{\mathrm{e}^{st}}_{u'(t)} \underbrace{\sin(tx)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) - 1) + \frac{x}{s^2}\Big[\mathrm{e}^{st}\sin(xt)\Big]_{t=0}^{t=b} - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) - 1) + \frac{x}{s^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(xb) - \frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t$ auf beiden Seiten liefert

$$\left(1 + \frac{x^2}{s^2}\right)\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t = \frac{s^2+x^2}{s^2}\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) - 1) + \frac{x}{s^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(bx)$$

und damit

$$\int_0^b \mathrm{e}^{st}\cos(xt)\, \mathrm{d}t = -\frac{s}{s^2+x^2} + \frac{s}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\cos(bx) + \frac{x}{s^2+x^2}\mathrm{e}^{sb}\sin(bx).$$

Wegen

$$|\mathrm{e}^{sb}\cos(bx)| \le \mathrm{e}^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0 \qquad \text{sowie} \qquad |\mathrm{e}^{sb}\sin(bx)| \le \mathrm{e}^{sb} \xrightarrow{b\to\infty} 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\,dt$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{st}\cos(xt)\,dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{st}\cos(xt)\,dt\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{s}{s^2+x^2}+\frac{s}{s^2+x^2}e^{sb}\cos(bx)+\frac{x}{s^2+x^2}e^{sb}\sin(bx)\right)\\ &= -\frac{s}{s^2+x^2}\end{aligned}$$

(ii) Wir untersuchen den Integranden in der Nähe der unteren Grenze. Es ist

$$\log(t)\le\log\left(\frac{1}{e}\right)=-1$$

für alle $0<t\le\frac{1}{e}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh (vgl. Paragraph 9 der Vorlesung)

$$\begin{aligned}0<\sinh(t)-t &= \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}-t=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}\\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+3)!}t^{2n+3}=t^3\underbrace{\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(2n+3)!}t^{2n}}_{=:h(t)>0}\end{aligned}$$

für alle $0<t\le\frac{1}{e}$. Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ist stetig als Potenzreihe mit Konvergenzradius unendlich. Als stetige Funktion nimmt sie auf kompakten Intervallen ihr Maximum an, also existiert ein $M>0$ mit $0<h(t)\le M$ für alle $0\le t\le\frac{1}{e}$.

Also ist

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\ge\frac{t\log(e)}{t^3h(t)}\ge\frac{1}{t^2M}$$

für alle $0<t\le\frac{1}{e}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}}\frac{1}{t^2M}\,dt=-\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{e}}=\frac{1}{M}\left(\frac{1}{a}-e\right)\xrightarrow{a\to0+}\infty$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{1}{t^2M}\,dt$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,dt$$

divergent. Somit ist das Integral

$$\int_0^\infty\frac{t\log(t)}{\sinh(t)-t}\,dt$$

ebenfalls divergent.

b) (i) Für alle $0 < t \leq 1$ gilt

$$t^2 \leqslant t \leqslant \sqrt{t}.$$

Damit folgt

$$0 < |\frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}| = \frac{1}{\sqrt{t} + \underbrace{(\sqrt{t-t^2})}_{\geqslant 0}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

für alle $0 < t \leqslant 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = 2\left[\sqrt{t}\right]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a\to 0+} = 2$$

Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}\, \mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

(ii) Sei $b > 0$. Es gilt:

$$\int_0^b \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{\log(1+t)}_{v(t)}\, \mathrm{d}t \overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[\mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t = -\frac{\log(1+b)}{\mathrm{e}^b} + \int_0^b \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t$$

Wegen

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{\mathrm{e}^b}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1+b)\mathrm{e}^b} = 0$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\log(1+t)\, \mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t$ konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Satz 13.5 der Vorlesung, weil für alle $0 \leqslant t < \infty$

$$\mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

gilt, und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \lim_{b\to\infty} -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=b} = 1 - \lim_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-b} = 1.$$

c) Wir berechnen für $t > 1$ mit $f(t) = (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))} = (\log(t))^2 \mathrm{e}^{-\log(t)\cdot\log(\log(t))}$, dass

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(\log(t))\frac{1}{t}t^{-\log(\log(t))} + (\log(t))^2\left(t^{-\log(\log(t))}\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\log(\log(t))\right)\right) \\ &= -t^{-1-\log(\log(t))}\log(t)(\log(t)(1+\log(\log(t))) - 2). \end{aligned}$$

Es gibt also ein $c \in (1,\infty)$, so dass für $t \geq c$ die Funktion $t \mapsto (\log(t))^2 t^{-\log(\log(t))}$ monoton fällt. Substituiere $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$:

$$\int_c^\infty \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{(\log(t))^2}{t^{\log(\log(t))}}\, \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_{\log(c)}^{\log(b)} x^2 \mathrm{e}^{x - x\log(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Sei $g(x) := x - x\log(x)$. Dann gilt $g'(x) = -\log(x)$ für $x > 0$ und damit $g'(x) < -1$ für $x > \mathrm{e}$. Zudem ist $g(\mathrm{e}^2) = -\mathrm{e}^2$ und somit

$$g(x) = g(\mathrm{e}^2) + \underbrace{\int_{\mathrm{e}^2}^{x} g'(y)\,\mathrm{d}y}_{=g(x)-g(\mathrm{e}^2)} < -\mathrm{e}^2 + \int_{\mathrm{e}^2}^{x} (-1)\,\mathrm{d}y = -x.$$

Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt für $x > \mathrm{e}^2$, dass $\mathrm{e}^{x - x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$. Da nach Aufgabe 70 $\int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty$, konvergiert das Integral nach dem Majorantenkriterium und die Reihe nach 13.6.

Aufgabe 72 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\log(t))^4\,\mathrm{d}t,$ (ii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Lösungsvorschlag

a) (i) Sei $a < 3$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \quad &\underset{\mathrm{d}s = s\,\mathrm{d}t}{\overset{s=e^t}{=}} \quad \int_{e^a}^{e^3} \frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{e^a}^{e^3} \frac{1+s-1}{1+s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{e^a}^{e^3} 1 - \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = [s - \log(1+s)]_{s=e^a}^{s=e^3} \\ &= e^3 - \log(1+e^3) - e^a + \log(1+e^a) \xrightarrow{a \to -\infty} e^3 - \log(1+e^3)\end{aligned}$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ konvergent und es ist

$$\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = e^3 - \log(1+e^3)$$

(ii) Per Definition ist das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ genau dann konvergent, wenn die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$ konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 \log(|t|)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t.$$

Sei $0 < a < 1$. Wegen

$$\int_{-1}^{-a} \log(|t|)\, \mathrm{d}t \overset{s=-t}{=} \int_a^1 \log(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^1 \log(|t|)\, \mathrm{d}t$$

reicht es, nur eins der beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz zu untersuchen. Es gilt

$$\int_a^1 \log(t)\, \mathrm{d}t = [t\log(t) - t]_{t=a}^{t=1} = (-1 - a\log(a) + a)$$

sowie

$$\lim_{a\to 0+} (a - a\log(a)) = \lim_{a\to 0+} a\log\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to 0+} \frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\to\infty} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Folglich ist $\int_0^1 \log(|t|)\, \mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\int_0^1 \log(|t|)\, \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \log(|t|)\, \mathrm{d}t = -1$$

und damit

$$\int_{-1}^1 \log(|t|)\, \mathrm{d}t = -2.$$

b) (i) Sei $0 < a < 1$. Es gilt:

$$\int_a^1 (\log(t))^4\, \mathrm{d}t \underset{\mathrm{d}t=-t\,\mathrm{d}s}{\overset{t=e^{-s}}{=}} -\int_{-\log(a)}^0 s^4 e^{-s}\, \mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4 e^{-s}\, \mathrm{d}s$$

Wegen $\lim_{a\to 0+} \log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\log(t))^4\, \mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4 e^{-s}\, \mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach Aufgabe 70 tatsächlich der Fall.

(ii) Auf $(0,1]$ gilt $\sin(\frac{1}{t}) \leqslant 1$. Da das "uneigentliche" Integral

$$\int_0^1 1\, \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} \int_a^1 1\, \mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} 1 - a = 1$$

konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das Ausgangsintegral.

c) Die Funktion $t \mapsto (\log(t))^{-\log(t)}$ ist für $t \geq \mathrm{e}$ monoton fallend. Substitution $x = \log(t)$, $\mathrm{d}t = e^x\, \mathrm{d}x$ liefert

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(\log(t))^{\log(t)}} = \int_{\log 3}^\infty \frac{\mathrm{e}^x}{x^x}\, \mathrm{d}x = \int_{\log 3}^\infty \mathrm{e}^{x - x\log(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Wie in Aufgabe 71 c) berechnet, gilt $\mathrm{e}^{x-x\log(x)} < \mathrm{e}^{-x}$ für $x > \mathrm{e}^2$ und da das uneigentliche Integral $\int_{\mathrm{e}^2}^\infty \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ existiert (Wert $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}$) konvergiert auch das Ausgangsintegral und nach 13.6 die gegebene Reihe.