Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
26.01.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

a) Beweisen Sie die verbleibenden Aussagen aus Satz 14.1: In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V existiert genau ein Nullvektor, zu jedem $x \in V$ genau ein additiv inverses Element $-x \in V$ und für dieses gilt $-x = (-1) \cdot x$.

b) Beweisen Sie Satz 14.3: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$, so ist U genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $0 \in U$ und für $x, y \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $x + y, \alpha x \in U$ gilt.

c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

(i) $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}, \quad a \in \mathbb{K}$ fest,

(ii) $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$.

Aufgabe 74 (Tutorium)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

a) $U := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$,

b) $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

c) $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 1\}$,

d) $U := \{f \in V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ hat mindestens eine Nullstelle$\}$.

Aufgabe 75 (Übung)

a) Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\operatorname{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V ist, die M enthalten.

b) Seien $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in V$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\cosh, \cosh^2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen $1, \sinh^2$ und $\cosh^2$?

b) Es seien $u_1 = (-3, 2, -3, 2)$, $u_2 = (3, -1, 1, 1)$, $u_3 = (-7, 3, -7, 3)$ sowie

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$

(ii) u_1, u_2, u_3 bilden eine Basis von U

Aufgabe 77 (Übung)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

b) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_3\}$,

(ii) $\mathrm{lin}(\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5\})$