Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
26.01.2015

# Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

## Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

### Aufgabe 73 (Übung)

**a)** Beweisen Sie die verbleibenden Aussagen aus Satz 14.1: In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ existiert genau ein Nullvektor, zu jedem $x \in V$ genau ein additiv inverses Element $-x \in V$ und für dieses gilt $-x = (-1) \cdot x$.

**b)** Beweisen Sie Satz 14.3: Ist $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$, so ist $U$ genau dann ein Untervektorraum von $V$, wenn $0 \in U$ und für $x, y \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $x + y, \alpha x \in U$ gilt.

**c)** Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$ sind.

(i) $U_a := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a\}, \quad a \in \mathbb{K}$ fest,

(ii) $U := \{(x_1, x_2) \in V = \mathbb{K}^2 \mid x_1^2 + x_2^4 = 0\}$.

### Lösungsvorschlag

**a)** Seien $0, \tilde{0}$ zwei Nullvektoren von $V$. Nach der Eigenschaft des Nullvektors gilt

$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}.$$

Sei $x \in V$ und $-x, \widetilde{-x}$ zwei Elemente aus $V$ mit $x + (-x) = x + (\widetilde{-x}) = 0$. Dann gilt

$$-x = (-x) + 0 = (-x) + (x + (\widetilde{-x})) = ((-x) + x) + (\widetilde{-x}) = 0 + (\widetilde{-x}) = (\widetilde{-x}) + 0 = (\widetilde{-x}).$$

Da wir gerade die Eindeutigkeit des additiven Inversen gezeigt haben, reicht es aus, wenn $(-1) \cdot x$ dessen Eigenschaft erfüllt. Dies ist der Fall wegen

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit wegen

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \overset{+(-(0\cdot x))}{\longrightarrow} 0 = 0 \cdot x.$$

**b)** Für die eine Richtung sei $U$ ein Untervektorraum von $V$, also ist $U$ mit den Verknüpfungen von $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Da jedes Element aus $U$ ein Element aus $V$ ist, stimmt der Nullvektor aus $U$ mit dem Nullvektor 0 aus $V$ überein, also $0 \in U$. Außerdem gilt für $x, y \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$, einfach weil die beiden Verknüpfungen per Definition $U$ als Bildbereich haben müssen.
Für die andere Richtung gelte die Charakterisierung aus der Aufgabenstellung. Bis auf $(V3)$ und $(V4)$ sind alle definierenden Eigenschaften $(Vi)$ in $U$ erfüllt, da wir dieselben Verknüpfungen

wie in $V$ haben und $U \subseteq V$ gilt. Wegen $0 \in U$ gilt auch $(V3)$. Wegen den beiden anderen Eigenschaften gilt, dass die Addition und Multiplikation mit $U$ im Definitionsbereich auch $U$ als Bildbereich haben. Da für $x \in U$ auch $\alpha x \in U$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, gilt also $-x = (-1) \cdot x \in U$, was schließlich $(V4)$ liefert.

**c)** (i) Sei $a = 0$. $U_0$ ist ein Untervektorraum von $V$, denn die konstante Nullfolge ist der Nullvektor in $V$ und liegt gleichzeitig in $U$. Zudem gilt für zwei Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ mit $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dass auch $a_n + b_n \to 0$ und $\alpha a_n \to 0$ für $n \to \infty$, also $(a_n) + (b_n)$, $\alpha(a_n) \in U_0$.
Sei $a \neq 0$. $U_a$ ist kein Untervektorraum, da $0 \notin U$. Doch $U_a$ kann geschrieben werden als $a + U_0$, wobei $a$ die Folge ist, die konstant $a$ ist. Da $U_0$ ein Untervektorraum von $V$ ist, ist $U_a$ somit ein affiner Unterraum von $V$.

(ii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist $x_1^2 + x_2^4 = 0$ genau dann, wenn $x_1 = x_2 = 0$ ist. Somit ist $U$ der triviale Untervektorraum von $V$.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist $(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \in U$ (wegen $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^4 = 1$), aber $2(\mathrm{i}, \mathrm{i}) = (2\mathrm{i}, 2\mathrm{i})$ nicht, denn $(2\mathrm{i})^2 + (2\mathrm{i})^4 = -4 + 16 = 12$. Somit ist $U$ kein Untervektorraum und da $0 \in U$ auch kein affiner Raum.

## Aufgabe 74 (Tutorium)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume bzw. affine Unterräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums $V$ sind.

**a)** $U := \{(a_n) \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$,

**b)** $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

**c)** $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 1\}$,

**d)** $U := \{f \in V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$.

### Lösungsvorschlag

**a)** $U$ ist ein Untervektorraum von $V$, denn die konstante Nullfolge liegt in $U$ und mit $(a_n), (b_n) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

womit die definierenden Eigenschaft eines Untervektorraums gezeigt sind.

**b)** $U$ ist ein Untervektorraum von $V$, denn der Nullvektor $(0,0,0)$ liegt in $U$ und mit $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$(x_1 + y_1) = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2) = -3x_3 - 3y_3 = -3(x_3 + y_3), \quad \alpha x_1 = 2\alpha x_2 = -3\alpha x_3,$$

also $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3), \alpha(x_1, x_2, x_3) \in U$, womit die definierenden Eigenschaft eines Untervektorraums gezeigt sind.

**c)** Nach Vorlesung ist $C^1[0,1]$ ein Vektorraum. Außerdem ist jede Funktion in $C^1[0,1]$ auf Riemann-integrierbar auf $[0,1]$. $U$ ist kein Untervektorraum, da die konstante Nullfunktion nicht in $U$ liegt. Es ist jedoch ein affiner Unterraum, denn: Die konstante Einsfunktion 1 liegt in $U$ und $U$ kann geschrieben werden als

$$1 + \underbrace{\{f \in R[0,1] \cap C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + f'(1/2) = 0\}}_{=:W},$$

was daran liegt, dass das Integral und die Ableitung sich linear Verhalten ($\int_0^1 (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, $(f+g)'(1/2) = f'(1/2) + g'(1/2)$). Da dasselbe für einen Vorfaktor $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt ($\int_0^1 (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $(\alpha f)'(1/2) = \alpha f'(1/2)$) und die konstante Nullfunktion in $W$ liegt, ist die Untervektorraumeigenschaft von $W$ gezeigt.

**d)** $U$ ist weder ein Untervektorraum noch ein affiner Unterraum von $V$, denn die konstante Nullfunktion liegt in $U$, genau wie die beiden Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto (x+1)^2$, aber $x \mapsto x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

## Aufgabe 75 (Übung)

**a)** Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\mathrm{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von $V$ ist, die $M$ enthalten.

**b)** Seien $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Zahlen (d.h. $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$). Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1, \dots, f_n \in V$, $f_i(x) = e^{\beta_i x}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$, sind linear unabhängig.

## Lösungsvorschlag

**a)** Wir wollen zeigen, dass

$$\mathrm{lin}(M) = \bigcap_{U \supset M, U \text{ UVR von } V} U.$$

Dass die rechte Menge in der linken enthalten ist, ist klar, da $\mathrm{lin}(M)$ ein solcher Untervektorraum von $V$ ist. Sei nun $U$ ein beliebiger Untervektorraum von $V$, der $M$ enthält. Ein Element $x \in \mathrm{lin}(M)$ lässt sich per Definition als Linearkombination endlich vieler Elemente aus $M$ schreiben. Da diese endlich vielen Elemente aus $M$ auch in $U$ liegen und dies ein Untervektorraum ist, liegt $x$ somit auch in $U$. Somit ist $\mathrm{lin}(M)$ eine Teilmenge jedes solchen Untervektorraums, also auch des Schnittes über all diese Untervektorräume.

**b)** Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über $n$.

Induktionsanfang ($n = 1$): Sei $\lambda_1 e^{\beta_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $e^{\beta_1 x} > 0$, folgt $\lambda_1 = 0$.

Induktionsschritt: Sei die Aussage für $n - 1 \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt (Induktionsvoraussetzung). Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 e^{\beta_1 x} + \dots + \lambda_n e^{\beta_n x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\beta_n x}$ und erhalten

$$\lambda_1 e^{(\beta_1 - \beta_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(\beta_{n-1} - \beta_n)x} + \lambda_n = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir differenzieren die letzte Gleichung und erhalten

$$\lambda_1(\beta_1-\beta_n)e^{(\beta_1-\beta_n)x}+\ldots+\lambda_{n-1}(\beta_{n-1}-\beta_n)e^{(\beta_{n-1}-\beta_n)x}=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Da $\beta_1-\beta_n,\ldots,\beta_{n-1}-\beta_n$ auch paarweise verschieden sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\lambda_1(\beta_1-\beta_n)=\ldots=\lambda_{n-1}(\beta_{n-1}-\beta_n)=0.$$

Da $\beta_i\neq\beta_n$ für $1\le i\le n-1$, folgt $(\beta_i-\beta_n)\neq 0$ für $1\le i\le n-1$ und damit

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_{n-1}=0.$$

Aus $(*)$ folgt $\lambda_n e^{\beta_n x}=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\lambda_n=0$. Also sind $f_1,\ldots,f_n$ linear unabhängig.

### Aufgabe 76 (Tutorium)

**a)** Zeigen Sie, dass die Funktionen cosh, $\cosh^2\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig sind. Gilt dies auch für die Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$?

**b)** Es seien $u_1=(-3,2,-3,2)$, $u_2=(3,-1,1,1)$, $u_3=(-7,3,-7,3)$ sowie

$$U:=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\mid x_1+x_2-x_3-x_4=0\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{lin}(\{u_1,u_2,u_3\})\subseteq U$

(ii) $u_1,u_2,u_3$ bilden eine Basis von $U$

### Lösungsvorschlag

**a)** Seien $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ mit

$$\alpha\cosh(x)+\beta\cosh^2(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Setzen wir $x=0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha=-\beta$. Leiten wir die Gleichung zwei Mal ab, ergibt sich

$$\alpha\sinh(x)+2\beta\cosh(x)\sinh(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

und

$$\alpha\cosh(x)+2\beta\cosh^2(x)+2\beta\sinh^2(x)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Setzen wir $x=0$ in diese Gleichung ein, ergibt sich $\alpha=-2\beta$. Somit folgt $\beta=2\beta$, also $\beta=0$ und somit $\alpha=0$.

Die drei Funktionen 1, $\sinh^2$ und $\cosh^2$ sind nicht linear unabhängig, denn wegen $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$1+\sinh^2-\cosh^2=0,$$

sodass sich die drei Funktionen nicht-trivial zu 0 linear kombinieren lassen.

**b)** Wir zeigen vorbereitend, dass $U$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Nach dem Untervektorraumkriterium der Vorlesung ist zu zeigen:

- $0\in U$: dies ist klar.

- Für alle $x, y \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$: Es gilt in der Tat

$$(x+y)_1 + (x+y)_2 - (x+y)_3 - (x+y)_4 = \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)}_{=0} = 0$$

  sowie

$$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_2 - (\alpha x)_3 - (\alpha x)_4 = \alpha \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}_{=0} = 0.$$

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} (-3) + 2 - (-3) - 2 &= 0 \quad (u_1) \\ 3 + (-1) - 1 - 1 &= 0 \quad (u_2) \\ -7 + 3 - (-7) - 3 &= 0 \quad (u_3) \end{aligned}$$

und damit $u_1, u_2, u_3 \in U$. Sei nun $x \in \mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$. Es existieren also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Da nach Obigem $U$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und $u_1, u_2, u_3 \in U$, liegt auch ihre Linearkombination $x$ in $U$.

(ii) Zuerst zeigen wir, dass die Menge $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear unabhängig ist. Dazu schreiben wir die Vektoren $u_1, u_2, u_3$ als Zeilen der Matrix $A$ und bringen diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot\tfrac{3}{7} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{7} & -2 & \frac{16}{7} \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \Big| \cdot 7 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & 16 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot(-2) \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ -7 & 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \Big| -\tfrac{1}{10} \sim \begin{pmatrix} -7 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach Vorlesung sind die Zeilen von $A$ damit in der Tat linear unabhängig.

Als nächstes sehen wir ein, dass $\mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) = U$ ist. Dazu stellen wir fest, dass $U \neq \mathbb{R}^4$, denn

$$e_1 = (1, 0, 0, 0) \notin U.$$

Wir stellen noch fest, dass wenn wir zwei endlich dimensionale Untervektorräume $U \subseteq W$ von $V$ haben mit $\dim(W) \leqslant \dim(U)$, dass dann $U = W$ gilt. Ist nämlich $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von $U$ und es würde ein $w \in W \setminus U$ existieren, so wären $u_1, \ldots, u_n, w$ $n+1$ linear unabhängige Vektoren in $W$, womit die Dimension von $W$ mindestens $n+1$ ist, ein Widerspruch.

Also ist $\dim U < 4$, denn ansonsten wäre $\dim \mathbb{R}^4 \leq \dim U = 4 < \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^4$ und damit $U = \mathbb{R}^4$.

Dann ist also $\dim U \leq 3 = \dim \mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$, $\mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$ nach Teilaufgabe (a) und damit $U = \mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

**Aufgabe 77 (Übung)**

**a)** Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha, \beta$ sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von $A$.

## Lösungsvorschlag

Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \; \cdot(-2) \\ + \\ + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 2 \; \cdot(-4) \\ + \\ \phantom{0} \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot\frac{1}{2} \; \cdot\frac{1}{4} \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot\frac{1}{2} \\ \mid \cdot\frac{1}{4} \\ \phantom{0} \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ + \; + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von $B$ und die Basis ist gegeben durch die drei ersten Zeilen der Matrix. In allen anderen Fällen ist eine Basis durch alle vier Zeilen der Ausgangsmatrix gegeben. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ + \\ \cdot\frac{1}{\beta-4} \; \cdot\frac{-3}{\beta-4} \mid \cdot\frac{1}{\beta-4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von $B$. Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$\begin{aligned} B &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \mid \cdot\frac{1}{\alpha-10} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \cdot 4 \; \cdot 1 \; \cdot(-6) \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Zeilennormalform von $B$.

### Aufgabe 78 (Tutorium)

**a)** Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von $A$.

**b)** Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_3\}$,

(ii) $\operatorname{lin}(\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^2 + x + 1,\, x^7 + x^5\})$

### Lösungsvorschlag

**a)** Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot(-3) \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot -\frac{1}{2} \\ | \cdot -\frac{1}{2} \\ | \cdot -\frac{1}{3} \end{array} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \;\; \cdot\tfrac{7}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig und bilden damit eine Basis ihrer linearen Hülle.

**b)** (i) Eine Basis ist gegeben durch $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, denn aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ folgt $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) = (0, 0, 0, )$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; ist ferner $v \in \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = x_3\}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = (a, b, a)$, also $v = av_1 + bv_2$.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig ist: Es gelte

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2(x^2 + x) + \lambda_3(x^2 + 1) + \lambda_4(x^7 + x^5) = 0,$$

also

$$\lambda_3 + \lambda_2 x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^2 + \lambda_4 x^5 + \lambda_4 x^7 = 0.$$

Da die Polynome $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \subset P$ linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_3 = 0, \quad , \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit ist $\{x^2,\, x^2 + x,\, x^2 + 1,\, x^7 + x^5\}$ linear unabhängig. Schließlich lässt sich das Polynom $x^2 + x + 1$ als Linearkombination aus den restlichen

Polynomen darstellen, und zwar gilt

$$-x^2 + (x^2 + x) + (x^2 + 1) = x^2 + x + 1.$$

Damit ist $\mathrm{lin}(\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^7 + x^5\})$ ein 4-dimensionaler Vektorraum und

$$\{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^7 + x^5\}$$

ist eine Basis dieses Vektorraums.

*Alternativ:* Offensichtlich ist dann auch $\{1, x, x^2, x^7 + x^5\}$ eine Basis (die Vektoren sind linear unabhängig und jeder Vektor lässt sich als Linearkombination der Vektoren der ersten Basis schreiben).