Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2014/2015
02.02.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 79 (Übung)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 80 (Tutorium)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(A|b)$ und $\operatorname{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Aufgabe 81 (Übung)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n k x_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\phi$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}\phi$.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Aufgabe 82 (Tutorium)

a) Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

b) Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = (1, 5\mathrm{i} - 1, 1 - \mathrm{i}, c^2)$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

Aufgabe 83 (Übung)

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei die transponierte Matrix A^T definiert durch $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Die Abbildung $P : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & \dots & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) P ist eine lineare Abbildung.

b) $\operatorname{Kern} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^T = -A\}$ (die Menge der schief-symmetrischen Matrizen).

c) $\operatorname{Bild} P = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A^T = A\}$ (die Menge der symmetrischen Matrizen).

d) $\dim(\operatorname{Bild} P)) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\operatorname{Kern} P) = \frac{n(n-1)}{2}$

Aufgabe 84 (Tutorium)

a) Gegeben sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$.
Ist ϕ linear? Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\phi$ und $\operatorname{Bild}\phi$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.