Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
30.10.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

a) Seien A, B und C beliebige Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

(i) (Widerspruchsbeweis) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.
(ii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$.
(iii) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.
(iv) (Kontraposition) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
(v) (Falluntersch.) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow B$.
(vi) $[(A \vee B) \wedge C] \Leftrightarrow [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)]$.

b) Negieren Sie folgende Aussagen.

(i) Anton kommt immer zu spät zur Vorlesung, wenn Prof. Müller die Vorlesung hält.

(ii) Alle Menschen sind zu faul zu arbeiten und unfreundlich, oder sie sind kriminell.

Lösungsvorschlag

a) Da alle logischen Verknüpfungen über Wahrheitstabellen definiert sind, arbeiten wir mit diesen, um alle Aussagen rigoros zu beweisen, selbst wenn einige natürlich "logisch" erscheinen. Wir beginnen immer mit allen Möglichkeiten für den Wahrheitsgehalt von A, B oder C, um danach in Kleinstschritten den Wahrheitsgehalt der auftretenden Verknüpfungen zu bestimmen. Sofern die bisherigen Wahrheitstafeln ausreichen, werden wir die Aussagen äquivalent ineinander umformen.

(i)

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	w	f
f	f	w	f

(ii)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	f	w	w	w

(iii)

A	B	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	w

(iv) Hier ist es möglich und auch sinnvoll, der tautologischen Äquivalenzen zu gebrauchen. Es ist

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad [\neg(A \wedge \neg B)] \quad \Leftrightarrow \quad [\neg(\neg B \wedge \underbrace{\neg(\neg A)}_{=A})] \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(v)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	w	w
f	f	w	f	f

(vi)

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

b) Zunächst formalisieren wir jeweils die obigen Aussagen, um sie logisch korrekt zu negieren.

(i) Sei zu jedem Zeitpunkt t die Aussage $M(t)$ gegeben, wobei $M(t)$ genau dann wahr ist, wenn Prof. Müller die Vorlesung hält. Weiter sei A die Aussage, dass Anton zu spät zur Vorlesung kommt. Zunächst bedeutet obige Aussage

$$\forall t : M(t) \Rightarrow A.$$

Aus (i) aus dem ersten Aufgabenteil ist ersichtlich, dass die Negation von $A \Rightarrow B$ $(A \wedge \neg B)$ ist. Damit gilt per definitionem des Allquantors und aufgrund des tertium-non-daturs $(\neg\neg A \Leftrightarrow A)$

$$\neg(\forall t : M(t) \Rightarrow A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t : M(t) \wedge \neg A$$

Das heißt in Sprache zurückübersetzt: Es gibt einen solchen Zeitpunkt t derart, dass Prof. Müller die Vorlesung hält und Anton nicht zu spät zur Vorlesung kommt.

(ii) Sei x ein Mensch und $FA(x)$, $FR(x)$ bzw. $K(x)$ beschreibe die Aussagen, dass x zu faul, freundlich bzw. kriminell ist. Dann bedeutet obige Aussage

$$\forall x : (FA(x) \wedge \neg FR(x)) \vee K(x).$$

Man beachte hier die gesetzten Klammern. Ohne diese ist die Aussage nicht klar! Wie oben negieren wir nun die Aussage unter Beachtung von **Aufgabe 1a) (iii)** und **(vi)**:

$$\neg[\forall x : (FA(x) \wedge \neg FR(x)) \vee K(x)] \quad \Leftrightarrow [\exists x : (\neg FA(x) \wedge \neg K(x)) \vee (FR(x) \wedge \neg K(x))].$$

D.h., es existiert ein Mensch, der nicht faul und nicht kriminell, oder freundlich und nicht kriminell ist.

Bem.: Wir verwenden zum Einen

$$\neg(A \vee B) \overset{a)(iii)}{\Leftrightarrow} \neg[\neg(\neg A \wedge \neg B)] \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B,$$

sowie zum Anderen

$$\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg[\neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)] \overset{a)(iii)}{\Leftrightarrow} \neg A \vee \neg B.$$

Auch in dieser Aufgabe verwenden wir, dass stets $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ gilt.

Aufgabe 2 (Tutorium)

Sie haben Ihre drei Bekannten Anton, Berta und Chris zu sich eingeladen und wissen Folgendes:

- Wenn Chris nicht kommt, kommt auch Berta nicht.
- Berta oder Chris kommt, nicht aber beide.
- Entweder kommen sowohl Anton als auch Chris oder beide kommen nicht.

Es seien A, B bzw. C die Aussagen, dass Anton, Berta bzw. Chris kommt.

a) Drücken Sie die drei bekannten Tatsachen mittels dieser Aussagen und den bekannten Aussageverknüpfungen ($\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$, etc.) aus.

b) Entscheiden Sie mithilfe einer Wahrheitswerttafel, wer kommt.

Lösungsvorschlag

a) Zunächst formalisieren wir die einzelnen Aussagen mithilfe der Aussagen A, B und C.

- Wenn Chris nicht kommt, kommt auch Berta nicht.
  $\Leftrightarrow \quad (\neg C \Rightarrow \neg B) \overset{1a)(iv)}{\Leftrightarrow} (B \Rightarrow C) :\Leftrightarrow A_1$
- Berta oder Chris kommt, nicht aber beide. $\quad \Leftrightarrow \quad (B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C) :\Leftrightarrow A_2$
- Entweder kommen sowohl Anton als auch Chris oder beide kommen nicht.
  $\Leftrightarrow \quad (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) :\Leftrightarrow A_3$

b)

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$(B \vee C) \wedge \neg(B \wedge C)$	$(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$	$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$
w	w	w	w	f	w	f
w	w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	w	f	f
f	f	f	w	f	w	f

A_1, A_2 und A_3 sind also nur dann gemeinsam erfüllt, wenn Anton und Chris kommen, aber Berta nicht.

Aufgabe 3 (Übung)

a) Beweisen Sie die zweite *De Morgansche Regel*: Sei I eine beliebige Indexmenge und für $\iota \in I$ sei $A_\iota \subseteq X$ mit Komplement $A_\iota^c = X \setminus A_\iota$ (allg.: $A^c := X \setminus A$). Zeigen Sie:

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right)^c = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c.$$

Hinweis: $x \in \bigcap_{\iota \in I} A_\iota :\Leftrightarrow \forall \iota \in I \,:\, x \in A_\iota$ und $x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota :\Leftrightarrow \exists \iota \in I \,:\, x \in A_\iota$.

b) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ derart, dass eine Bijektion $\{0;1;\ldots;n\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ existiert. Was muss für zwei endliche Mengen gelten, damit eine Bijektion zwischen ihnen existiert?

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n\mathbb{Z} := \{nz : \; z \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$zRw :\Leftrightarrow (z - w \in n\mathbb{Z})$$

für $z, w \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation R gegeben ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$. Wie viele verschiedene Äquivalenzklassen von R gibt es?

Lösungsvorschlag

a) Es gilt für jedes $x \in X$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\iota \in I} A_\iota \quad &\Leftrightarrow \quad \exists j \in I : x \notin A_j \\ &\Leftrightarrow \quad \exists j \in I : x \in A_j^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\iota \in I} A_\iota^c. \end{aligned}$$

b) Zunächst bestimmen wir $Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$. Die Potenzmenge einer Menge ist die Menge aller Teilmengen dieser Menge. Da die leere Menge nur sich selbst enthält, gilt $Pot(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Beachte, dass $Pot(\emptyset)$ nun nicht mehr leer ist, sondern als Element die leere Menge enthält. Damit gelten folglich $Pot(Pot(\emptyset)) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ bzw. $Pot(Pot(Pot(\emptyset))) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}\}$.

<u>Beh.:</u> Genau für $n = 3$ existiert eine Bijektion $\{0;1;\ldots;n\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$.

<u>Bew.:</u> Angenommen, $n < 3$, d.h., $n \in \{1;2\}$. Dann kann eine Abbildung $\{0;1\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv sein, da dies sonst die Eindeutigkeit einer Abbildung verletzte und die Anzahl der Elemente in $Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ 4 beträgt. Mit einem analogen Argument kann eine Funktion $\{0;1;2\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ nicht surjektiv sein. Sei $f : \{0;1;\ldots;n\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ injektiv. Nach dem *Schubfachprinzip* muss dann $n \leq 3$ gelten. Denn wegen der Injektivität von f wird jedem $y \in Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ höchstens ein Element aus $\{0;1;\ldots;n\}$ zugeordnet. Da aber jedem $x \in \{0;1;\ldots;n\}$ ein $y \in Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ zugeordnet wird, gilt $n \leq 3$. Für $n = 3$ ist eine mögliche bijektive Abbildung $f : \{0;1;2;3\} \to Pot(Pot(Pot(\emptyset)))$ durch $f(0) := \emptyset$, $f(1) := \{\emptyset\}$, $f(2) := \{\{\emptyset\}\}$, $f(3) := \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ gegeben.

Analog zu dem gerade geführten Beweis lässt sich zeigen, dass zwei endliche Mengen sich genau dann bijektiv ineinander abbilden lassen, wenn sie gleich mächtig sind, d.h. die gleiche Anzahl von Elementen besitzen.
Hinweis: Die Potenzmenge $Pot(M)$ einer endlichen Menge M hat immer $2^{|M|}$ Elemente, wobei $|M|$ die Anzahl der Elemente in M ist.

c) Wir zeigen, dass die Relation reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.

Reflexivität: Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt zRz, da $z - z = 0 \in n\mathbb{Z}$.
Transitivität: Seien $z, w, v \in \mathbb{Z}$ mit zRw und wRv. Also existieren ganze Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$z - w = n \cdot k, \qquad w - v = n \cdot l$$

Somit gilt $z - v = (z - w) + (w - v) = n \cdot k + n \cdot l = n \cdot (k + l) \in n\mathbb{Z}$, also zRv.
Symmetrie: Seien $z, w \in \mathbb{Z}$ mit zRw. Also existiert eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $z - w = n \cdot k$. Somit gilt $w - z = n \cdot (-k) \in n\mathbb{Z}$, also wRz.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[0]_R$ ist nun die Menge aller ganzen Zahlen, die in Relation zu 0 steht, also

$$[0]_R = \{z \in \mathbb{Z} : z \in n\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} = \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}.$$

$[0]_R$ beinhaltet also jede n-te ganze Zahl ausgehend von Null. Analog enthält $[k]_R$ jede n-te ganze Zahl ausgehend von der Zahl k. Somit wiederholen sich die entstandenen Mengen alle n Schritte, zum Beispiel $[n]_R = [0]_R$. Deshalb existieren n verschiedene Äquivalenzklassen von R.

Aufgabe 4 (Tutorium)

a) Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

(i) $M_1 \subseteq M_2$, (ii) $M_1 \cap M_2 \supseteq M_1$, (iii) $M_1 \cup M_2 \subseteq M_2$.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen R Äquivalenz- bzw. Ordnungsrelationen sind. Dabei seien M und N nichtleere Mengen sowie (z_1, n_1) und (z_2, n_2) Elemente aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

(i) $MRN :\Leftrightarrow (M \subseteq N)$. (ii) $z_1 R z_2 :\Leftrightarrow |z_1 - z_2| < 5,2$. (iii) $(z_1, n_1) R (z_2, n_2) :\Leftrightarrow z_1 n_2 = z_2 n_1$.

Lösungsvorschlag

a) Wir wollen zeigen, dass

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}.$$

Nach Vorlesung ist (!) dies gleichbedeutend damit, die vier Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (i), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) zu beweisen. Die Alternative dazu, die wir hier durchführen werden, ist der so genannte **Ringschluss**. Wir beweisen

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Jede der vier verlangten Implikationen kann nun durch eine oder mehrere so bewiesene Implikationen gezeigt werden. Zum Beispiel gilt (iii) $\Rightarrow$ (ii) wegen (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Einerseits ersparen wir uns so quantitativ eine Implikation (drei statt vier), andererseits kann es vorkommen, dass eine Implikation wie (iii) $\Rightarrow$ (ii) schwieriger zu beweisen ist als die Implikationen, die wir tatsächlich beweisen beim Ringschluss.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $M_1 \subseteq M_2$. Es gilt also für jedes $x \in M_1$ auch $x \in M_2$. Die Mengengleichheit in (ii) zeigen wir, indem wir beide Inklusionen zeigen.
Sei $x \in M_1 \cap M_2$. Dann gilt $x \in M_1$ und $x \in M_2$, also insbesondere $x \in M_1$. Sei nun $x \in M_1$. Dann

ist nach Voraussetzung auch $x \in M_2$ und damit $x \in M_1 \cap M_2$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $M_1 \cap M_2 \supseteq M_1$. Offensichtlich gilt stets $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1$, also auch $M_1 \cap M_2 = M_1$. Sei $x \in M_2$. Dann gilt sofort $x \in M_1 \cup M_2$, da hierfür nur $x \in M_1$ oder $x \in M_2$ gelten muss. Sei nun $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, dann ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1$, dann ist nach Voraussetzung $x \in M_1 \cap M_2$, also insbesondere $x \in M_2$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $M_1 \cup M_2 \subseteq M_2$. Offensichtlich gilt $M_1 \cup M_2 \supseteq M_2$, also auch $M_1 \cup M_2 = M_2$. Sei $x \in M_1$. Dann ist insbesondere $x \in M_1 \cup M_2$, was nach Voraussetzung M_2 ist, also $x \in M_2$ und somit $M_1 \subseteq M_2$.

b) (i) R ist eine Ordnungsrelation.
Reflexivität: Für eine beliebige Menge M gilt $M \subseteq M$.
Transitivität: Seien M, N und P Mengen mit MRN und NRP, also $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$. Sei $x \in M$. Dann gilt nach der ersten Inklusion $x \in N$ und damit nach der zweiten Inklusion $x \in P$. Also gilt $M \subseteq P$, also MRP.
Antisymmetrie: Seien M und N Mengen mit MRN und NRM, also $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$. Per definitionem gilt also $M = N$.

(ii) R ist weder Ordnungs- noch Äquivalenzrelation, denn R ist nicht transitiv. Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Aus $|x - y| < 5,2$ und $|x - z| < 5,2$ folgt nicht stets $|y - z| < 5,2$. Beispiel: $x = 0$, $y = -5$, $z = 5$.

(iii) R ist eine Äquivalenzrelation.
Reflexivität: Für ein beliebiges $(z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gilt $(z, n)R(z, n)$ wegen der trivialen Gleichheit $z \cdot n = z \cdot n$.
Transitivität: Seien $(z_1, n_1), (z_2, n_2), (z_3, n_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1)R(z_2, n_2)$ und $(z_2, n_2)R(z_3, n_3)$, also $z_1 n_2 = z_2 n_1$ und $z_2 n_3 = z_3 n_2$. Dividieren wir auf die erste Gleichung durch $n_1 n_2$ und die zweiten durch $n_2 n_3$, so erhalten wir

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}.$$

Nun benutzen wir die Gleichheit des ersten und dritten Terms und multiplizieren diese mit $n_1 n_3$, womit wir $z_1 n_3 = z_3 n_1$, also $(z_1, n_1)R(z_3, n_3)$.
Symmetrie: Seien $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1)R(z_2, n_2)$, also $z_1 n_2 = z_2 n_1$. Drehen wir die Gleichung um, so sehen wir sofort, dass $(z_2, n_2)R(z_1, n_1)$.

Aufgabe 5 (Übung)

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g.

a) Zeigen Sie durch direkte Beweise:

(i) Sind f und g injektiv/surjektiv/bijektiv, so ist auch h injektiv/surjektiv/bijektiv.

(ii) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

b) Zeigen Sie durch indirekte Beweise:

(i) Ist h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(ii) Ist h injektiv, so ist auch f injektiv.

Hinweis: Machen Sie sich vor einem Beweis jeweils anhand eines einfachen Beispiels klar, was die Behauptung besagt.

Lösungsvorschlag

(a) (i) Seien f und g injektiv. Seien $x, y \in X$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x) = h(y) \Rightarrow x = y$. Es gilt:

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\overset{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} f(x) = f(y) \\ &\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = y \end{aligned}$$

Seien nun f und g surjektiv. Es ist $f(X) = Y$ und $g(Y) = Z$. Damit gilt $h(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$, was die Surjektivität von h bedeutet.

(ii) Sei $y \in Y$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Wir definieren zunächst $z := g(y)$. Da h surjektiv ist, existiert zu diesem $z \in Z$ ein $x \in X$ mit $z = h(x) = g(f(x))$. Damit wissen wir $g(f(x)) = z = g(y)$ und wegen der Injektivität von g folgt $f(x) = y$.

(b) Da indirekte Beweise gefordert sind, müssen wir z. B. bei **(i)** zeigen: Falls g nicht surjektiv ist, ist auch h nicht surjektiv.

(i) Ist g nicht surjektiv, so bedeutet dies $R(g) \neq Z$. Also gibt es ein solches $z \in Z$, dass für alle $y \in Y$ $g(y) \neq z$ gilt. Insbesondere gilt dann aber $h(x) = g(f(x)) \neq z$ für alle $x \in X$, d. h., h ist nicht surjektiv.

(ii) Ist f nicht injektiv, so bedeutet dies, dass es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$ gibt. Dann folgt aber $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$; also ist h nicht injektiv.

Aufgabe 6 (Tutorium)

a) Seien f, g und h wie in Aufgabe 5 gegeben. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweise:

(i) Ist g injektiv und h nicht injektiv, so ist f nicht injektiv.

(ii) Ist h injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Widerlegen Sie die folgenden falschen Aussagen durch je ein Gegenbeispiel.

(iii) Ist h injektiv, so ist auch g injektiv.

(iv) Ist h surjektiv, so ist auch f surjektiv.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$ bijektiv ist.

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir nehmen an, f wäre injektiv. Da h nicht injektiv ist, gäbe es x_1, $x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $h(x_1) = h(x_2)$, d.h., $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da g injektiv ist, gälte $f(x_1) = f(x_2)$. Aus der vorausgesetzten Injektivität von f folgte nun $x_1 = x_2$, ein Widerspruch zur Wahl von x_1 und x_2.

(ii) Angenommen, g wäre nicht injektiv. Dann gäbe es also $y_1, y_2 \in Y$ mit $y_1 \neq y_2$ und $g(y_1) = g(y_2)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Da f als Funktion eine eindeutige Zuordnung ist, folgte $x_1 \neq x_2$ aus $y_1 \neq y_2$. Wir erhalten $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2)) = h(x_2)$. Somit ist h nicht injektiv, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(iii) Wir betrachten stets $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ und ändern nur die Definitionsbereiche bzw. die Menge, in die abgebildet wird. Es ergibt sich $h(x) = x^2$. Für $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ injektiv, g jedoch nicht.

(iv) Für f und g wie in **(iii)** ist h surjektiv, f jedoch nicht.

b) Zur Injektivität von f: Seien $x, y \in [0,1)$. Dann gilt

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2(1-y) = y^2(1-x) \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = xy(x-y) \Leftrightarrow (x+y-xy)(x-y) = 0.$$

Wegen $x \geq x^2$, wenn $0 \leqslant x < 1$, (!) und $xy \geqslant 0$, folgt zunächst

$$x+y-xy \geqslant x^2+y^2-2xy+xy \geqslant (x-y)^2+xy \geqslant (x-y)^2 \geqslant 0.$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn $x = y$. Damit gilt

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x+y-xy)(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

was die Injektivität von f bedeutet.

Zur Surjektivität von f. Sei $y \in \mathbb{R}_0^+$. Def. $x := -\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + y}$. Zunächst einmal stellen wir aufgrund der *Monotonie* der Wurzel fest, dass

$$0 \leq -\frac{y}{2} + \frac{y}{2} \leq -\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y} < -\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y + 1} = -\frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 1 = 1,$$

d.h., $x \in [0,1)$. Beachte, dass für nicht-negatives Argument w, $\sqrt{w^2} = w$ gilt. Die Monotonie der Wurzel bedeutet hier, dass für $a, b \geq 0$ stets

$$a < b \Leftrightarrow 0 < b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\underbrace{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}_{>0} \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

gilt. Gleiches gilt, wenn man $<$ durch $\leqslant$ ersetzt. Damit gelten

$$\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y} \geq \frac{y}{2} \quad \text{sowie} \quad \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y} < \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + y + 1}.$$

Weiter gilt

$$f(x) = \frac{\left(-\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + y}\right)^2}{1 + \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} + y}} = \frac{y^2 - 2y\sqrt{y^2+4y} + y^2 + 4y}{4 + 2y - 2\sqrt{y^2+4y}} = \frac{(4 + 2y - 2\sqrt{y^2+4y})y}{4 + 2y - 2\sqrt{y^2+4y}} = y.$$

<u>Zur Bestimmung von x:</u> Seien $y \in \mathbb{R}_0^+$ und $x \in [0,1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2}{1-x} &\Leftrightarrow y(1-x) = x^2 \Leftrightarrow y + \frac{y^2}{4} = x^2 + xy + \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{y + \frac{y^2}{4}} = \left|x + \frac{y}{2}\right| \\ &\Leftrightarrow \left(x = -\frac{y}{2} + \sqrt{y + \frac{y^2}{4}} (\in [0,1)) \vee x = -\frac{y}{2} - \sqrt{y + \frac{y^2}{4}} (\notin [0,1))\right) \\ &\overset{x\in[0,1)}{\Leftrightarrow} x = -\frac{y}{2} + \sqrt{y + \frac{y^2}{4}} \end{aligned}$$