Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
26.10.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

(i) $\max\{x; y\} = (x + y + |x - y|)/2$ und $\min\{x; y\} = (x + y - |x - y|)/2$,

(ii) $xy \leqslant \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{4\varepsilon}$.

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A - B := \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists a \in A, b \in B : \ x = a - b\}.$$

Zeigen Sie, dass $A-B$ ebenfalls beschränkt ist mit $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ und $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

Aufgabe 8 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gelten.

(i) $|x + 1| + |x - 1| > 2$ (ii) $|2 - |2 - x|| \leqslant 1$ (iii) $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$

b) Bestimmen Sie, falls existent, jeweils das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen.

(i) $A := \{x^2 - x + 2 : \ x \in \mathbb{R}\}$. (ii) $B := \{n + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$. (iii) $C := \{\frac{x^2}{1+x^2} : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 9 (Übung)

a) Zeigen Sie zunächst

(i) Für $k, n \in \mathbb{N}$ $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hinweis: Machen Sie sich die Identität im Pascalschen Dreieck klar.

(ii) *Indexshift:* Für $l, m, n \in \mathbb{Z}$ und eine Abbildung $S : \{m + l; m + l + 1; \ldots; n + l\} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} S(k + l) = \sum_{k=m+l}^{n+l} S(k).$$

Hinweis: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ lässt sich analog zu $\sum_{k=1}^{n} S(k)$ allgemeiner $\sum_{k=m}^{m} S(k) := S(m)$, $\sum_{k=m}^{n+1} S(k) := \sum_{k=m}^{n} S(k) + S(n + 1)$ für alle $n \geqslant m$ definieren.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und Abbildungen $S : \{1; 2; \ldots; n + 1\} \to \mathbb{C}$ und $T : \{0; 1; \ldots; n\} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} S(k) + \sum_{k=0}^{n} T(k) = S(n + 1) + T(0) + \sum_{k=1}^{n} [S(k) + T(k)].$$

b) Beweisen Sie nun den *Binomischen Lehrsatz*: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Aufgabe 10 (Tutorium)

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(iii) Es gilt $2^n \geqslant n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $n^2 > 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

b) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?
Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.
Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mit $n+1$ Pferden entfernen wir ein Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \ldots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das entfernte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen ein anderes Pferd aus der Gruppe. Die Gruppe enthält nun wieder n Pferde, zum Beispiel $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie zum Beispiel P_1. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe.

Aufgabe 11 (Übung)

a) Sei p ein Polynom über $\mathbb{C}$. Wir definieren $\bar{p}(z) := \overline{p(\overline{z})}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) z_0 ist genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $\bar{p}$ ist.

(ii) Ist p reell, so ist z_0 genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{z_0}$ es ist.

b) Zeichnen Sie folgende Mengen in die komplexe Zahlenebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) \leqslant 2\}$, (ii) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - \mathrm{i}| \geqslant 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 2\}$.

Aufgabe 12 (Tutorium)

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 := \frac{1}{(\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2}$. (ii) $z_2 := \frac{1+3\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}|\}$. (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| \leqslant \operatorname{Re} z\}$.

c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) $z^3 - (3 - \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = 0$. (ii) $|z|^2 - 4\overline{z} + 3 = 0$.

Hinweis: Bei **(i)** gibt es eine Lösung z der Form $z = w + \mathrm{i}w$ mit $w \in \mathbb{C}$.