Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
06.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7 (Übung)

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

(i) $\max\{x; y\} = (x + y + |x - y|)/2$ und $\min\{x; y\} = (x + y - |x - y|)/2$,

(ii) $xy \leqslant \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{4\varepsilon}$.

b) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A - B := \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists a \in A, b \in B : \; x = a - b\}.$$

Zeigen Sie, dass $A - B$ ebenfalls beschränkt ist mit $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ und $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

Lösungsvorschlag

a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(i) Hier lässt sich eine leichte Fallunterscheidung anwenden.
Fall 1: $x \leqslant y$. Es gelten

$$\begin{aligned} \max\{x; y\} &= y = (x + y + (y - x))/2 = (x + y + |x - y|)/2, \\ \min\{x; y\} &= x = (x + y - (y - x))/2 = (x + y - |x - y|)/2. \end{aligned}$$

Fall 2: $y \leqslant x$. Verwende $\min/\max\{x; y\} = \min/\max\{y; x\}$ und **Fall 1**.

(ii) Seien $u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(u + v)^2 \geqslant 0$. Insbesondere gilt

$$2uv \leqslant u^2 + v^2$$

Für die Wahl $u = \sqrt{\varepsilon}x$ und $v = y/(2\sqrt{\varepsilon})$ ergibt sich

$$xy = 2uv \leqslant u^2 + v^2 = \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{4\varepsilon}.$$

b) Zunächst zum Supremum: Da A und B nichtleer und beschränkt, also insbesondere nach oben bzw. nach unten beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \inf B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A - B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A - B) = \alpha - \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum Einen, dass $\alpha - \beta$ eine obere Schranke von $A - B$ ist, zum Anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.

Wählen wir ein beliebiges $x \in A - B$, so existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a - b$. Da α obere Schranke für A und β untere Schranke für B ist, gilt $a \leqslant \alpha$ und $-b \leqslant -\beta$. Addieren wir diese beiden Gleichungen, erhalten wir

$$x = a - b \leqslant \alpha - \beta.$$

Damit wissen wir, dass $A-B$ nach oben beschränkt und $\alpha-\beta$ eine obere Schranke von $A-B$ ist. Also existiert das Supremum und es gilt $\sup(A-B) \leqslant \alpha-\beta$. Wie zeigen wir, dass hier Gleichheit gilt, also, dass $\alpha-\beta$ die kleinste obere Schranke ist? Dazu beweisen wir, dass keine Zahl, die kleiner als $\alpha-\beta$ ist, eine obere Schranke für $A-B$ sein kann, also zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha+\beta$ ein $x \in A+B$ existiert mit $x > \Gamma$.
Da α kleinste obere Schranke für A ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $a \in A$, dass

$$\alpha-\varepsilon \leqslant a \leqslant \alpha.$$

Da umgekehrt β die größte untere Schranke von B ist, gibt es analog für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $b \in B$, dass

$$\beta \leqslant b \leqslant \beta+\varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein solches $x \in A-B$ gibt, dass

$$\alpha-\beta-\varepsilon \leqslant x \leqslant \alpha-\beta,$$

wobei wir die hintere Ungleichung bereits eingesehen haben. Um die vordere Ungleichung zu zeigen, wählen wir $a \in A, b \in B$ derart, dass

$$\alpha-\varepsilon/2 \leqslant a \quad \text{und} \quad \beta+\varepsilon/2 \geqslant b$$

gelten. Wählen wir $x = a-b$, so folgt

$$\alpha-\beta-\varepsilon = \alpha-\varepsilon/2-(\beta+\varepsilon/2) \leqslant a-b = x.$$

Damit ist $\alpha-\beta$ die kleinste obere Schranke von $A-B$, d.h., $\sup(A-B) = \alpha-\beta$.

Bevor wir zum Infimum übergehen, machen wir uns zunächst folgende Identitäten klar:

$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad \text{und} \quad \sup(-A) = -\inf(A),$$

wobei

$$-A := \{0\}-A = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists a \in A \,:\, x = -a\}$$

gesetzt wird. Man beachte, dass die zweite Identität aus der ersten unter Verwendung von $-(-A) = A$ folgt. Sei also $\alpha = \sup A$ wie oben. Wegen

$$a \leqslant \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -a \geqslant -\alpha$$

für alle $a \in A$ ist $-\alpha$ eine untere Schranke von $-A$. Da α die kleinste obere Schranke von A ist, kann keine größere untere Schranke γ von $-A$ als $-\alpha$ existieren, da sonst $-\gamma < \alpha$ eine obere Schranke von A wäre, ein Widerspruch zur Minimalität von α.

Nun zum Infimum: Mit dem Letztgenannten und dem Obigen folgt nun

$$\inf(A-B) = -\sup(-(A-B)) = -\sup(B-A) = -\sup(B)+\inf(A) = \inf(A)-\sup(B),$$

wie noch zu zeigen war.

Aufgabe 8 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichungen gelten.

(i) $|x+1|+|x-1|>2$ (ii) $|2-|2-x||\leqslant 1$ (iii) $\frac{3x}{1+|x|}<4x^2$

b) Bestimmen Sie, falls existent, jeweils das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen.

(i) $A:=\{x^2-x+2:\ x\in\mathbb{R}\}$. (ii) $B:=\{n+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\}$. (iii) $C:=\{\frac{x^2}{1+x^2}:\ x\in\mathbb{R}\}$.

Lösungsvorschlag

a) (i) Erstmal interpretieren wir die Ungleichung geometrisch. Da der Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen deren Abstand misst, suchen wir in der ersten Aufgabe alle diejenigen reellen Zahlen, bei denen die Summe der Abstände zu 1 und zu -1 mehr als zwei beträgt. Da der Betrag abschnittsweise definiert ist, nähern wir uns anschließend den Ungleichungen über entsprechende Fallunterscheidungen.

Da der Abstand von 1 und -1 genau 2 beträgt, kann sich ein $x\in\mathbb{R}$, das der Ungleichung genügt, nicht zwischen beiden befinden, da sonst die Summe der Abstände genau zwei wäre. Algebraisch lautet dies

$$-1\leqslant x\leqslant 1 \quad\Rightarrow\quad |x+1|+|x-1| \;=\; x+1+(1-x) \;=\; 2.$$

Befindet sich x außerhalb des Intervalls $[-1,1]$, so ist die Summe der Abstände automatisch größer als zwei. Ist nämlich x kleiner als -1, so ist der Abstand zu 1 bereits größer als zwei, und ist x größer als 2, so ist der Abstand zu -1 bereits größer als 2. Algebraisch lautet dies

$$\begin{aligned} x>1 \quad&\Rightarrow\quad |x+1|+|x-1| \overset{|x-1|\geqslant 0}{\geqslant} |x+1| \;=\; x+1 \;>\; 2,\\ x<-1 \quad&\Rightarrow\quad |x+1|+|x-1| \overset{|x+1|\geqslant 0}{\geqslant} |x-1| \;=\; 1-x \;>\; 2.\end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $x\in\mathbb{R}$, die der Ungleichung genügen, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

(ii) Dem Leser sei hier eine geometrische Interpretation überlassen. Zunächst unterscheiden wir nach dem Vorzeichen des Arguments im inneren Betrag, da wir zuvor keine Aussage über den äußeren Betrag treffen können.
1. Fall: $x<2$. Dann ist $2-x>0$ und deshalb

$$|2-|2-x||\leqslant 1 \Leftrightarrow |x|\leqslant 1.$$

Damit ist die Ungleichung in diesem Fall erfüllt für $-1\leqslant x\leqslant 1$.
2. Fall: $x\geqslant 2$. Dann ist $2-x\leqslant 0$ und deshalb

$$|2-|2-x||\leqslant 1 \Leftrightarrow |4-x|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant 4-x\leqslant 1 \Leftrightarrow -5\leqslant -x\leqslant -3 \Leftrightarrow 3\leqslant x\leqslant 5.$$

Insgesamt gilt $|2-|2-x||\leqslant 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]\cup[3,5]$.

(iii) Wieder unterscheiden wir nach dem Vorzeichen des Arguments im Betrag. Ist $x=0$, so ist die Ungleichung offensichtlich nicht erfüllt.
1. Fall: $x>0$. Es gilt

$$\frac{3x}{1+|x|}<4x^2 \quad\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\quad 3x<4x^2+4x^3 \quad\Leftrightarrow\quad 0<4x\left(x^2+x-\frac{3}{4}\right)=4x\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\right].$$

Das Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann größer 0, wenn entweder beide reelle Zahlen positiv oder beide negativ sind. Da in diesem Fall $x > 0$ ist, muss zur Gültigkeit der Ungleichung der hintere Term positiv sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $|x + 1/2| > 1$ ist. Infolgedessen muss also $x > 1/2$ gelten, d.h., $x \in (1/2, \infty)$.
Fall 2: $x < 0$. Der Term auf der linken Seite des Ungleichheitszeichens der Ausgangsungleichung ist stets negativ und der rechts davon ist stets positiv. Damit gilt die Ungleichung trivialerweise.

Insgesamt gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, die der Ungleichung genügen, $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, \infty)$.

b) (i) 1) Es gilt $\min A = \frac{7}{4}$.

Dazu formen wir zunächst den definierenden Ausdruck mittels quadratischer Ergänzung um: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Daraus lesen wir einerseits ab, dass $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$ gilt, womit $\frac{7}{4}$ in A liegt. Andererseits sehen wir $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein. Also folgt direkt $\inf A = \min A = \frac{7}{4}$.

2) Maximum und Supremum von A exisitieren nicht. Dazu zeigen wir, dass A nach oben unbeschränkt ist, d.h., zu jedem $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in A$ mit $a > \gamma$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $x := \max\{\gamma, 2\} = \begin{cases} 2, & \gamma < 2, \\ \gamma, & \gamma \geqslant 2. \end{cases}$. Dann gilt

$$\underbrace{x^2 - x + 2}_{=:a \in A} = x \underbrace{(x-1)}_{\geq 1,\text{ da } x \geq 2} + 2 \geq x + 2 > x \geq \gamma.$$

(ii) 1) Es gilt $\min B = 2$.

Es ist $2 \in B$ (man setze $n = 1$). Ferner erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} + 2 = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Also folgt direkt $\inf B = \min B = 2$.

2) Supremum und Maximum von B existieren nicht, denn für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ existiert nach Satz 4.4 (3) der Vorlesung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \beta$. Insbesondere ist dann $n + \frac{1}{n} > n > \beta$. Also kann kein $\beta \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für B sein.

(iii) 1) Es gilt $\min C = 0$. Es gilt $0 \in C$ (man setze $x = 0$). Außerdem gilt offenbar $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also folgt direkt $\inf D = \min D = 0$.

2) Es gilt $\sup C = 1$. Die Menge C ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{1+x^2} < \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Insbesondere wird 1 nicht angenommen. Es bleibt zu zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von C ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von C ist. Wir müssen dazu ein Element in C finden, das größer als Γ ist. Hierzu zeigen wir, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma$. Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2) \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes $x \in \mathbb{R}$ (etwa für $x = \frac{\Gamma}{1-\Gamma} + 1$) erfüllt.

3) C hat kein Maximum, da $1 \notin C$, wie oben gesehen.

Aufgabe 9 (Übung)

a) Zeigen Sie zunächst

(i) Für $k, n \in \mathbb{N}$ $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hinweis: Machen Sie sich die Identität im Pascalschen Dreieck klar.

(ii) *Indexshift:* Für $l, m, n \in \mathbb{Z}$ und eine Abbildung $S : \{m+l; m+l+1; \ldots; n+l\} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} S(k+l) = \sum_{k=m+l}^{n+l} S(k).$$

Hinweis: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ lässt sich analog zu $\sum_{k=1}^{n} S(k)$ allgemeiner $\sum_{k=m}^{m} S(k) := S(m)$, $\sum_{k=m}^{n+1} S(k) := \sum_{k=m}^{n} S(k) + S(n+1)$ für alle $n \geqslant m$ definieren.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$ und Abbildungen $S : \{1; 2; \ldots; n+1\} \to \mathbb{C}$ und $T : \{0; 1; \ldots; n\} \to \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} S(k) + \sum_{k=0}^{n} T(k) = S(n+1) + T(0) + \sum_{k=1}^{n} [S(k) + T(k)].$$

b) Beweisen Sie nun den *Binomischen Lehrsatz*: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Lösungsvorschlag

a) (i) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann gilt wegen $(n-k+1)! = (n-k+1)\cdot(n-k)!$ und $k! = k\cdot(k-1)!$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n! \cdot [(n-k+1)+k]}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

(ii) Um die Identität nachzuweisen, müssen wir auf die Definition der Ausdrücke zurückgehen. Nach dem Hinweis seien die gegebenen Summenzeichen analog zu $\sum_{k=1}^{n} a_k$ definiert. Es gelten nach Definition

$$\sum_{k=m}^{m} S(k+l) \;=\; S(m+l) \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{j+1} S(k+l) \;=\; \sum_{k=m}^{j} S(k+l) + S(j+l+1)$$

sowie

$$\sum_{k=m+l}^{m+l} S(k) \;=\; S(m+l) \quad \text{und} \quad \sum_{k=m+l}^{j+l+1} S(k) \;=\; \sum_{k=m+l}^{j+l} S(k) + S(j+l+1)$$

für $j \geq m$. Damit sind die beiden Ausdrücke induktiv genau gleich definiert und deswegen gleich.

Bemerkung: Ausgehend von der Definition von Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k$ könnte die Summe $\sum_{k=m}^{n} S(k)$ für $n \geqslant m$ alternativ auch über

$$\sum_{k=m}^{n} S(k) \;:=\; \sum_{k=1}^{m-n+1} S(k-1+m)$$

definieren. Damit wäre die Gleichheit der obigen Summen auch sofort klar.

(iii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $S : \{1;2;\ldots;n+1\} \to \mathbb{C}$ und $T : \{0;1;\ldots;n\} \to \mathbb{C}$ zwei Abbildungen. Nach Definition des Summenzeichens gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} S(k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} S(k) + S(n+1) \tag{0.1}$$

und z.B. mithilfe von Induktion lässt sich

$$\sum_{k=0}^{n} T(k) - \sum_{k=1}^{n} T(k) \;=\; T(0)$$

zeigen.

Induktionsanfang: Nach Definition gilt für $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} T(k) - \sum_{k=1}^{1} T(k) \;=\; \sum_{k=0}^{0} T(k) + T(1) - T(1) \;=\; T(0).$$

Induktionsschluss: Für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle Abbildungen $\tilde{T} : \{0;1;\ldots;n\} \to \mathbb{C}$ gelte $\sum_{k=0}^{n} \tilde{T}(k) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(k) = \tilde{T}(0)$ (Induktionsvoraussetzung). Sei nun $T : \{0;1;\ldots;n+1\} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Wir definieren

$$\tilde{T} : \{0;1;\ldots;n\} \to \mathbb{C}, \quad k \mapsto T(k).$$

Dann lässt sich für $\tilde{T}$ die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h.,

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{T}(k) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(k) = \tilde{T}(0).$$

Damit folgt für T

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} T(k) - \sum_{k=1}^{n+1} T(k) \;&=\; \sum_{k=0}^{n} T(k) + T(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} T(k) + T(n+1)\right) \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} \tilde{T}(k) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}(k) \;=\; \tilde{T}(0) \;=\; T(0),\end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

Das gerade Bewiesene bedeutet aber gerade

$$\sum_{k=0}^{n} T(k) = T(0) + \sum_{k=1}^{n} T(k). \tag{0.2}$$

Addieren von (0.1) und (0.2) ergibt unter Verwendung von (!)

$$\sum_{k=1}^{n}[S(k)+T(k)] \;=\; \sum_{k=1}^{n} S(k) + \sum_{k=1}^{n} T(k)$$

das Gewünschte. Wer mit der Summenschreibweise noch Probleme hat, mache sich zunächst die Aussage mithilfe der informalen Schreibweise klar:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} S(k) + \sum_{k=0}^{n} T(k) \quad &= \; T(0)+ \quad T(1)+T(2)+\ldots+T(n) \\
&\qquad\qquad\; +S(1)+S(2)+\ldots+S(n)+S(n+1) \\
&= \; T(0)+ \quad \sum_{k=1}^{n}[S(k)+T(k)] + S(n+1).
\end{aligned}$$

b) <u>Induktionsanfang:</u> Die Formel ist klar für $n=0$ bzw. auch für $n=1$ wegen $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$.
<u>Induktionsschluss:</u> Für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $a,b \in \mathbb{C}$ gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k}_{=:T(k)} + \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}}_{=:S(k+1)}.
\end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$

$$S(k) \;=\; S((k-1)+1) \;=\; \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{(k-1)+1} \;=\; \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.$$

Dann ergibt sich unter Verwendung von des Aufgabenteils **a)**

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} T(k) + \sum_{k=0}^{n} S(k+1) \overset{\mathbf{a)(ii)}}{=} \sum_{k=0}^{n} T(k) + \sum_{k=1}^{n+1} S(k) \\
&\overset{\mathbf{a)(iii)}}{=} S(n+1) + T(0) + \sum_{k=1}^{n}[S(k)+T(k)] \\
&= \binom{n}{n}a^0 b^{n+1} + \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k \\
&\overset{\mathbf{a)(i)}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,
\end{aligned}
$$

wie zu zeigen war.

Aufgabe 10 (Tutorium)

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(iii) Es gilt $2^n \geqslant n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $n^2 > 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$.

b) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?
Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.
Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \dots, P_{n+1}$ mit $n+1$ Pferden entfernen wir ein Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \dots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das entfernte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen ein anderes Pferd aus der Gruppe. Die Gruppe enthält nun wieder n Pferde, zum Beispiel $P_1, \dots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie zum Beispiel P_1. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe.

Lösungsvorschlag

a) (i) Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.
Induktionsschritt: Die Formel gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$(n \to n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

(ii) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die gegebene Zahl $4^{2\cdot 1+1} + 3^{1+2} = 91 = 7 \cdot 13$.
Induktionsschritt: Die gegebene Zahl sei durch 13 teilbar für ein $n \in \mathbb{N}$, also $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt $(n \to n+1)$

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} = 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} = 3(4^{2n+1} + 3^{n+2}) + 13 \cdot 4^{2n+1} = 13 \cdot (3k + 4^{2n+1}).$$

(iii) Wir zeigen zunächst den Hinweis.
Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt $n^2 = 16 > 9 = 2n+1$.
Induktionsschluss: Es gelte $n^2 > 2n+1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt $(n \to n+1)$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2n + 2n + 1 + 1 > 2n + 3 = 2(n+1) + 1.$$

Ein alternativer, direkter Beweis benutzt im Wesentlichen, dass $(n-4)^k \geq 0$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $n \geqslant 4$. Es ist nämlich für $n \geq 4$

$$n^2 \;=\; (n-4)^2 + 8n - 16 \;=\; (n-4)^2 + 6(n-4) + 2n + 8 \;\overset{n\geqslant 4}{\geqslant}\; 2n + 8 \;>\; 2n+1.$$

Nun beweisen wir mit diesem Wissen die Aussage der Aufgabe.
Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt $2^n = 16 \geqslant 16 = n^2$.
Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt $(n \to n+1)$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung den Hinweis benutzt haben.

b) Das Problem ist, dass die Argumentation des Induktionsschlusses nicht beim Schritt von 1 nach 2, also für $n = 1$, funktioniert. Aus einer Gruppe von $n + 1 = 2$ Pferden können wir nicht zwei verschiedene Pferde entfernen und dabei ein festes Pferd (im Beweis mit P_1 bezeichnet) in den resultierenden Gruppen haben. Wäre der Beweis erbracht, dass je zwei Pferde immer dieselbe Farbe haben, so würde der Induktionsschluss jedoch funktionieren.

Aufgabe 11 (Übung)

a) Sei p ein Polynom über $\mathbb{C}$. Wir definieren $\bar{p}(z) := \overline{p(\overline{z})}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) z_0 ist genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $\bar{p}$ ist.

(ii) Ist p reell, so ist z_0 genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{z_0}$ es ist.

b) Zeichnen Sie folgende Mengen in die komplexe Zahlenebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) \leqslant 2\}$, (ii) $\{z \in \mathbb{C} \big| \, |z - \mathrm{i}| \geqslant 1 \ \wedge \ |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 2\}$.

Lösungsvorschlag

a) In den beiden Aussagen müssen wir jeweils zwei Implikationen ("$\Rightarrow$" und "$\Leftarrow$") zeigen.

(i) "$\Rightarrow$": Sei z_0 eine Nullstelle von p. Nach **Satz 5.2 (1)** der Vorlesung gibt es dann genau ein solches Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$, dass

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann gilt nach Definition

$$\bar{p}(z) = \overline{p(\overline{z})} = \overline{(\overline{z} - z_0)q(\overline{z})} = (z - \overline{z_0})\overline{q(\overline{z})}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Dabei verwenden wir $\overline{wz} = \overline{wz}$, sowie $\overline{(\overline{z})} = z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist dann $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $\overline{p}$.

"$\Leftarrow$": Sei nun $w_0 := \bar{z_0}$ eine Nullstelle von $f := \bar{p}$. Wegen

$$\bar{f}(z) := \overline{\bar{p}(z)} = p(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt aus "$\Rightarrow$", dass $\overline{w_0} = z_0$ eine Nullstelle von $\bar{f} = p$ ist.

(ii) Ist p reell, d.h., existieren $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

so gilt

$$\bar{p}(z) = \overline{p(\overline{z})} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \overline{z}^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\overline{\overline{z}^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = p(z)$$

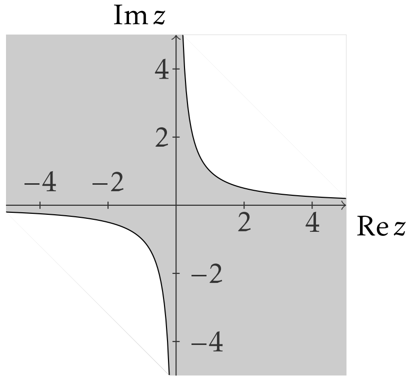
für alle $z \in \mathbb{C}$, da für eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ stets $\overline{r} = r$ und eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$ gilt. Nach **(i)** ist z_0 genau dann eine Nullstelle von p, wenn $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von $\bar{p}$ ist. Da wir $p = \bar{p}$ gezeigt haben, ist der Beweis damit geschlossen.

b) (i) Wegen $z^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy$ gilt

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leqslant 2\right\} = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid xy \leqslant 1\}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle

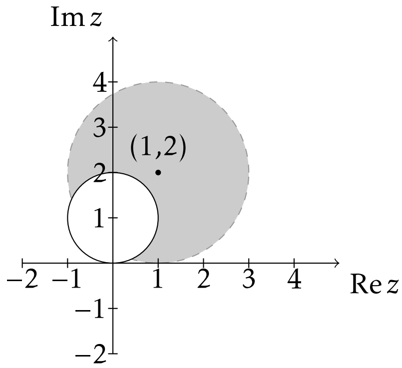
1. Fall $x > 0$. Dann ist $y \leqslant \frac{1}{x}$ gefordert.
2. Fall $x = 0$. Dann ist $xy \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erfüllt.
3. Fall $x < 0$. Dann ist $y \geqslant \frac{1}{x}$ gefordert.



(ii) Zunächst gilt

$$M := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - i| \geqslant 1 \ \land \ |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 2\} \ = \ \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - \mathrm{i}| \geqslant 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - (1 + 2\mathrm{i})| < 2\},$$

d.h., M ist der Schnitt eines Kreisäußeren eines Kreises (inklusive des Kreisrandes) um i mit Radius 1 mit dem Kreisinneren eines Kreises um $1 + 2\mathrm{i}$ mit Radius 2 (exklusive des Kreisrandes).



Aufgabe 12 (Tutorium)

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) $z_1 := \frac{1}{(\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2}$. (ii) $z_2 := \frac{1+3\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}|\}$. (ii) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - \mathrm{i}| \leqslant Re(z)\}$.

c) Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen erfüllen.

(i) $z^3 - (3 - \mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = 0$. (ii) $|z|^2 - 4\overline{z} + 3 = 0$.

Hinweis: Bei **(i)** gibt es eine Lösung z der Form $z = w + \mathrm{i}w$ mit $w \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

(i) Es gilt

$$z_1 = \frac{1}{(\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2} = \frac{(-\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2}{(\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2(-\sqrt{3}\mathrm{i}+1)^2} = \frac{-3-2\sqrt{3}\mathrm{i}+1}{16} = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot \mathrm{i},$$

also $\operatorname{Re} z_1 = -1/8$, $\operatorname{Im} z_1 = -\sqrt{3}/8$.

(ii) Es gilt

$$z_2 = \frac{1+3\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}} = \frac{1+3\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}\cdot\frac{2+2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \frac{-4+8\mathrm{i}}{8} = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}.$$

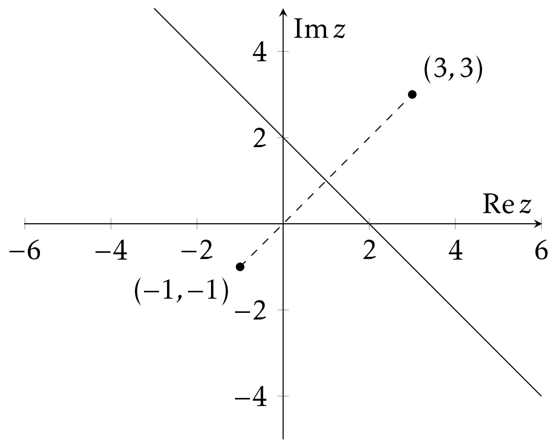
Somit ist $\operatorname{Re} z_2 = -1/2$, $\operatorname{Im} z_2 = 1$.

b) Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) Wegen $|z+1+\mathrm{i}| = |z-(-1-\mathrm{i})|$ und $|z-3-3\mathrm{i}| = |z-(3+3\mathrm{i})|$ handelt es sich um die Menge der Punkte in $\mathbb{C}$, die von $-1-\mathrm{i}$ und $3+3\mathrm{i}$ denselben Abstand haben, also die Gerade durch die Punkte 2 und $2\mathrm{i}$.

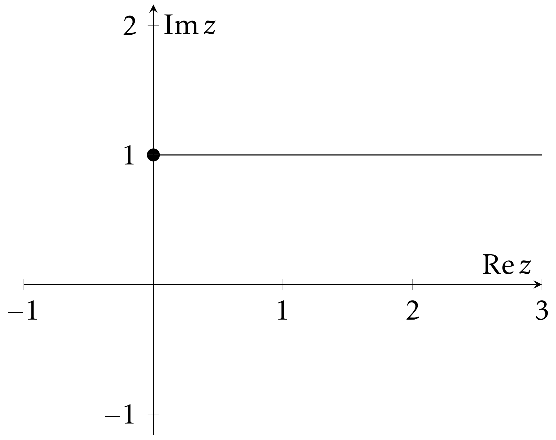
Wollen wir dies rechnerisch feststellen, schreiben wir $z = x+\mathrm{i}y$ und quadrieren beide Seiten (es geht dabei keine Information verloren, da beide Seiten nicht negativ sind). Nach der Definition des Betrages gilt also

$$\begin{aligned}
|z+1+\mathrm{i}| = |z-3-3\mathrm{i}| &\Leftrightarrow |z+1+\mathrm{i}|^2 = |z-3-3\mathrm{i}|^2\\
&\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 = (x-3)^2+(y-3)^2\\
&\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2-6y+9\\
&\Leftrightarrow 8y = 16-8x \Leftrightarrow y = 2-x.
\end{aligned}$$



(ii) Wir schreiben wieder $z = x+\mathrm{i}y$ und stellen zunächst fest, dass für $|z-\mathrm{i}| \leqslant \operatorname{Re} z$ folglich $x = \operatorname{Re} z \geqslant 0$ gelten muss. Also dürfen wir wieder ohne Informationsverlust die geforderte Ungleichung quadrieren und erhalten hierbei

$$x^2+(y-1)^2 \leqslant x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad y = 1.$$



c) (i) Wir folgen dem Hinweis und suchen eine Lösung der Gestalt $z = w + \mathrm{i}w = (1 + \mathrm{i})w$ mit $w \in \mathbb{C}$. Durch Ausmultiplizieren oder unter Verwendung von **Aufgabe 9 b)** berechnen wir hierfür

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^2 &= 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i},\\ (1+\mathrm{i})^3 &= -2 + 2\mathrm{i} = -2(1-\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Einsetzen des Ansatzes $z = w(1 + \mathrm{i})$ in die Ausgangsgleichung liefert

$$\begin{aligned}0 &= w^3(1+\mathrm{i})^3 - (3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2w^2 - \mathrm{i}(1+i)w + 1 + 3\mathrm{i}\\ &= -2(1-\mathrm{i})w^3 - 2(1+3\mathrm{i})w^2 + (1-\mathrm{i})w + 1 + 3\mathrm{i}\\ &= -2(1-\mathrm{i})w\left(w^2 - \frac{1}{2}\right) - 2(1+3\mathrm{i})\left(w^2 - \frac{1}{2}\right)\\ &= -2(1-\mathrm{i})\left(w^2 - \frac{1}{2}\right)\left(w + \underbrace{\frac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}_{=2v}\right)\\ &= -2(1-\mathrm{i})\left(w^2 - \frac{1}{2}\right)(w - 1 + 2\mathrm{i})\end{aligned}$$

mit $v := (1+3\mathrm{i})/(2-2\mathrm{i}) = (-1+2\mathrm{i})/2$ wie in Teilaufgabe **a) (ii)**. Damit lauten die Lösungen dieser letzten Gleichung $w_1 := 1/\sqrt{2}$ und $w_2 := -1/\sqrt{2}$ und $w_3 := 1 - 2\mathrm{i}$. Die zugehörigen Lösungen der Ausgangsgleichung lauten dann $z_1 := (1+\mathrm{i})w_1 = 1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2}$, $z_2 := (1+\mathrm{i})w_2 = -1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$ und $z_3 := (1+\mathrm{i})w_3 = (1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i}$. Damit gilt $z \in \{\pm(1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2}); 3 - \mathrm{i}\}$.

(ii) Zunächst stellen wir fest, dass eine komplexe Zahl genau dann 0 ist, wenn sowohl ihr Real- als auch ihr Imaginärteil 0 ist. Da $|z|^2 + 3$ reell ist, muss folglich der Imaginärteil von $-4\bar{z}$ gleich 0 sein. Für $z = x + \mathrm{i}y$ bedeutet dies gerade, dass

$$0 = \operatorname{Im}(-4(x - \mathrm{i}y)) = 4y,$$

d.h., $y = 0$ gilt. Wir suchen also eine reelle Lösung der Gleichung. Mithilfe von quadratischer Ergänzung erhalten wir wiederum

$$0 = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1,$$

d.h., $z_1 := x_1 := 2 + 1 = 3$ bzw. $z_2 := x_2 := 2 - 1 = 1$.