Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
02.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge $(a_n)_n$ sei definiert durch $a_n := \frac{3n^2}{n^2+\mathrm{i}}$. Beweisen Sie die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$ über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $n_0(\varepsilon)$ bestimmen, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt.

b) Definiere $a_1 := 1$ sowie für $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}.$$

Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass sowohl $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Berechnen Sie dazu die Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = f(a_n)$ durch zweifache Iteration der gegebenen Rekursionsvorschrift. Zeigen Sie, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren und folgern Sie mit Beispiel (3) vor Hilfssatz 6.6 der Vorlesung, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Beweisen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexwertige Folge, so gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) Zeigen Sie: Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Die (reellwertige) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := \sqrt{2}$, $a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom ungleich dem Nullpolynom, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Hinweis: Betrachten Sie $(\sqrt[n]{|n^k/z^n|})_n$ und verwenden Sie $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 16 (Tutorium)

Untersuchen Sie für die jeweilige Folgenvorschrift den Grenzwert der so definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n := \sqrt{2n^2+3n} - n.$

b) $a_n := \sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} - 3n.$

c) $a_n := \dfrac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}.$

d) $a_n := \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}.$

e) $a_n := \dfrac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2}.$

f) $a_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n.$

g) $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n.$

h) $a_n := \sqrt[n]{n!}.$

i) $a_n := \displaystyle\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$

j) $a_n := \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n},\ a,b,c \geqslant 0.$

Aufgabe 17 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über eine beliebige reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $\alpha_n := \sup\{a_k :\ k \geqslant n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, monoton fallend gegen a konvergiert.

b) Hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungswert a und ist $k \in \mathbb{N}$, so hat auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{n+k}$ für alle $\mathbb{N}$ den Häufungswert a.

Aufgabe 18 (Tutorium)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche komplexwertige Funktion derart, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_n$?

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe jedes $z \in \{\pm 1, (\pm 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}, \pm\mathrm{i}, (\mp 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}\}$ als Häufungswerte.

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe keinen Häufungswert und sei weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen 2015, sei aber nicht monoton.

(v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiere $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.