Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
13.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Vorbemerkung

Der kürzeren Notation halber werden wir in der Lösung für eine (komplex- oder reellwertige) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets $(a_n)_n$ schreiben. Falls die Indexmenge von $\mathbb{N}$ abweichen sollte, wird dies speziell erwähnt.

Aufgabe 13 (Übung)

a) Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n := \frac{3n^2}{n^2+\mathrm{i}}$. Beweisen Sie die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$ über die Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $n_0(\varepsilon)$ bestimmen, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt.

b) Definiere $a_1 := 1$ sowie für $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}.$$

Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass sowohl $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Berechnen Sie dazu die Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = f(a_n)$ durch zweifache Iteration der gegebenen Rekursionsvorschrift. Zeigen Sie, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren und folgern Sie mit Beispiel (3) vor Hilfssatz 6.6 der Vorlesung, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösungsvorschlag

a) Indem wir im Zähler und Nenner n^2 ausklammern und die aus der Vorlesung bekannte Tatsache verwenden, dass $\frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$, sehen wir anhand der Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+\mathrm{i}} = \frac{3}{1+\frac{1}{n^2}\mathrm{i}} \to 3 \qquad (n \to \infty).$$

Wir möchten die angedeutete Konvergenz anhand der Definition explizit nachrechnen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$|a_n - 3| = \left|\frac{3n^2}{n^2+\mathrm{i}} - 3\right| = \left|\frac{-3\mathrm{i}}{n^2+\mathrm{i}}\right| = \frac{3}{\sqrt{n^4+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{n^4}} = \frac{3}{n^2} \leqslant \frac{3}{n}.$$

Falls wir nun $n_0(\varepsilon)$ als die kleinste ganze Zahl größer als $\varepsilon/3$ wählen, erhalten wir

$$|a_n - 3| \leqslant \frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Damit ist die Konvergenz gezeigt.

b) Wir berechnen zunächst die Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = f(a_n)$, um eine Rekursionsvorschrift für $(b_n)_n$, $b_n := a_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $(c_n)_n$, $c_n := a_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, zu erhalten. Dazu iterieren wir zweimal die gegebene Rekursionsvorschrift. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n} = 1 - \frac{1}{2+a_n}.$$

Damit gelten dann folgende Rekursionsvorschriften für $(b_n)_n$ bzw. $(c_n)_n$:

$$b_{n+1} = a_{2n+2} = 1 - \frac{1}{2+a_{2n}} = 1 - \frac{1}{2+b_n} \quad \text{bzw.} \quad c_{n+1} = \ldots = 1 - \frac{1}{2+c_n}.$$

Um eine Idee für das zu Zeigende zu erhalten, berechnen wir zunächst ein paar Folgeglieder von $(a_n)_n$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_2 &= 1/2\\
a_3 &= 2/3\\
a_4 &= 3/5 = 39/(5 \cdot 13)\\
a_5 &= 5/8\\
a_6 &= 8/13 = 40/(5 \cdot 13).
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die ungeraden Folgeglieder fallend und die geraden wachsend sind. Diese Beobachtung wollen wir verallgemeinern, d.h., wir zeigen, dass $(b_n)_n = (a_{2n})_n$ eine wachsende und $(c_n)_n = (a_{2n-1})_n$ eine fallende Folge ist. Da $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ rekursiv definiert sind, bietet es sich an, einen Induktionsbeweis zu wagen.
Induktionsanfang: Es ist $b_2 = a_4 = 3/5 > 1/2 = a_2 = b_1$ und $c_2 = a_3 = 2/3 < 1 = a_1 = c_1$.
Induktionsschluss: Seien für festes $n \in \mathbb{N}$ $b_{n+1} > b_n$ und $c_{n+1} < c_n$ (Induktionsvoraussetzung). Mit der obigen Rekursionsvorschrift erhalten wir dann ($n \to n+1$)

$$b_{n+2} = 1 - \frac{1}{2+b_{n+1}} > 1 - \frac{1}{2+b_n} = b_{n+1},$$

sowie

$$c_{n+2} = 1 - \frac{1}{2+c_{n+1}} < 1 - \frac{1}{2+c_n} = c_{n+1},$$

was den Induktionsschluss schließt.
Als Nächstes zeigen wir, dass sowohl $(b_n)_n$ als auch $(c_n)_n$ beschränkt sind, indem wir die Beschränktheit von $(a_n)_n$ zeigen. Genauer zeigen wir

$$0 \leqslant a_n \leqslant 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Folgeglieder von $(a_n)_n$ (einheitlich) beschränkt sind, sind es insbesondere auch die geraden bzw. ungeraden.
Induktionsanfang: Es ist $0 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 1$, damit ist die Behauptung für $n = 1$ gezeigt.
Induktionsschluss: Sei nun für festes $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+a_n} \leqslant 1,$$

nach Rekursionsvorschrift also gerade $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$.
Da nun $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ jeweils beschränkt und monoton sind, folgt aus dem Monotoniekriterium (6.3), dass sie konvergieren. Es seien also $b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass $b_n \to b$ und $c_n \to c$, wenn $n \to \infty$. Daraus folgt mit **Satz 6.2 (4)**, dass auch

$$\frac{1}{2+b_n} \to \frac{1}{2+b} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{2+c_n} \to \frac{1}{2+c}$$

im Grenzfall $n \to \infty$ gelten. Wir betrachten nun in den jeweiligen Rekursionsvorschriften von $(b_n)_n$ bzw. $(c_n)_n$ den Grenzübergang $n \to \infty$ und erhalten

$$b \leftarrow b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+b_n} \to 1 - \frac{1}{2+b} \quad \text{bzw.} \quad c \leftarrow c_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+c_n} \to 1 - \frac{1}{2+c}.$$

Umformen der dadurch erhaltenen Gleichung ergibt gerade

$$\begin{aligned} b &= \frac{1+b}{2+b} \quad &\Leftrightarrow \quad b^2 + b = 1 \\ c &= \frac{1+c}{2+c} \quad &\Leftrightarrow \quad c^2 + c = 1 \end{aligned}$$

Lösen dieser Gleichung (z.B. durch quadratische Ergänzung) ergibt jeweils die Lösungen $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Da jedoch $(-1-\sqrt{5})/2 < 0$ und $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ jeweils nicht-negative Folgen sind, sind nach **Satz 6.2 (2)** auch ihre Grenzwerte nicht negativ. Daraus ergibt sich $b = c = (-1+\sqrt{5})/2$, d.h., $(b_n)_n = (a_{2n})_n$ und $(c_n)_n = (a_{2n-1})_n$ konvergieren gegen denselben Grenzwert. Mit **Beispiel (3)** vor **Satz 6.6** daraus, dass auch $(a_n)_n$ gegen $(-1+\sqrt{5})/2$ konvergiert.

Aufgabe 14 (Tutorium)

a) Beweisen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexwertige Folge, so gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) Zeigen Sie: Ist $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$, so divergiert $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Die (reellwertige) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 := \sqrt{2}$, $a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösungsvorschlag

a) Die Folge $(a_n)_n$ konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Somit existiert ein solches $n_0 \in \mathbb{N}$, dass

$$|a_n - a| < 1 \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

Daraus folgt insbesondere

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

womit diese unendlich vielen Folgenglieder beschränkt sind. Übrig bleiben nur noch endlich viele Zahlen $a_1, \ldots, a_{n_0-1}$, die durch den Betrag ihres größten Elements beschränkt sind. Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a|+1\} =: C < \infty.$$

Man beachte, dass C eine von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Schranke ist. Daher ist $(a_n)_n$ ist beschränkt.

b) In **Aufgabenteil a)** haben wir gesehen, dass aus Konvergenz einer Folge ihre Beschränktheit folgt. Die Kontraposition dieser Aussage bedeutet, dass aus der Unbeschränktheit einer Folge folgt, dass sie divergiert. Nach **Folgerung 4.12 (1)** finden wir wegen $|b| > 1$ zu jedem $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b|^N > K$. Damit gibt es keine obere Schranke von $(b^n)_n$ und deswegen divergiert $(b^n)_n$.

c) Wir zeigen zunächst per Induktion, dass die Folge monoton wachsend ist.
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$.
Induktionsschluss: Es gelte $a_{n+1} > a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \overset{IV}{>} \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1},$$

wobei sich nach **Lemma 4.13** und der Definition der Wurzel die Ungleichung $2 + a_{n+1} > 2 + a_n$ auf die Wurzel überträgt. Nun zeigen wir, dass die Folge nach oben beschränkt ist.
Behauptung: $a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Da $2 < 4$ gilt nach Lemma 4.13 auch $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$.
Induktionsschluss: Es gelte $a_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{IV}{<} \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, nach Vorlesung (6.3) demnach konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Die Beschränktheit der Folge nach unten durch 0 (!) überträgt sich wegen Satz 6.2 (2) auf den Grenzwert. Dazu wähle man als Vergleichsfolge jeweils die konstante Folge 0, um

$$a_n \geqslant 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geqslant 0$$

zu erhalten. Um den Grenzwert zu berechnen, betrachten wir die Rekursionsvorschrift und auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$.

$$a \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \to \sqrt{2 + a} \tag{0.1}$$

Die Konvergenz der rechten Seite der Gleichung sieht man wie folgt ein: Offensichtlich konvergiert $(b_n)_n$, wobei $b_n := 2 + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gesetzt werde, gegen $b := 2 + a$. Weiter gilt wegen der Monotonie der Wurzel und der obigen Abschätzung für a bzw. a_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \cdot \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|\sqrt{b_n} - \sqrt{b}| = \frac{|b_n - b|}{\sqrt{b_n} + \sqrt{b}} \leqslant \frac{|a_n - a|}{2 \cdot \sqrt{2}},$$

weswegen mithilfe von $|a_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$ (Konvergenz von $(a_n)_n$ gegen a) $(\sqrt{b_n})_n = (\sqrt{2 + a_n})_n$ gegen $b = 2 + a$ konvergiert.
Aus Gleichung (0.1) folgt damit $a = \sqrt{2 + a}$. Es folgt $a^2 = 2 + a$ und somit $a = 2$ oder $a = -1$. Da $a \geqslant 0$ ist $a = 2$ der korrekte Grenzwert.

Aufgabe 15 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist p ein (komplexes) Polynom ungleich dem Nullpolynom, so folgt

$$\sqrt[n]{|p(n)|} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

b) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, so gilt

$$\frac{n^k}{z^n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Hinweis: Betrachten Sie $(\sqrt[n]{|n^k/z^n|})_n$ und verwenden Sie $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag

a) Sei p ein komplexes Polynom vom Grad $N \in \mathbb{N}$, d.h., es existieren $a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Beachte, dass $a_N \neq 0$ nach Forderung des Grades N gilt.

$$n^k \leqslant n^N$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leqslant k \leqslant N$ gelten zunächst

$$|p(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k| n^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N,$$

sowie

$$|p(n)| \geqslant |a_N| n^N - \left| \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^k \right| \geqslant |a_N| n^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| n^k \geqslant |a_N| n^N - \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) n^{N-1} = n^N \left(|a_N| - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right).$$

Da $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \to 0$, wenn $n \to \infty$, gibt es zu $\varepsilon := |a_N|/2$ ein solches $n_0(\varepsilon)$, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \leqslant \frac{|a_N|}{2}$$

für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Für diese $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt dann

$$|p(n)| \geqslant n^N \left(|a_N| - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| \right) \geqslant \frac{|a_N|}{2} n^N.$$

Insgesamt gilt also für jedes feste $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$\frac{|a_N|}{2} n^N \leqslant |p(n)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k| \right) n^N$$

und somit schließlich (wir benutzen **Lemma 4.13** zur Monotonie der Wurzel)

$$1 = 1 \cdot 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{2}}\sqrt[n]{n^N} \leqslant \sqrt[n]{|p(n)|} \leqslant \sqrt[n]{\left(\sum_{k=0}^{N}|a_k|\right)}\sqrt[n]{n^N} \to 1 \cdot 1 = 1$$

für $n \to \infty$. Nach **Satz 6.2 (3)** folgt die Behauptung.

b) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Die Idee des Beweises beruht auf der Beobachtung, dass wegen $\sqrt[n]{n^k} \to 1$, wenn $n \to \infty$, (s.o.) auch

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^k}{z^n}\right|} \to \frac{1}{|z|} < 1$$

für $n \to \infty$ gilt. Potenzieren dieses Grenzwertes ergibt, dass $(n^k/z^n)_n$ auf eine noch zu formalisierende Weise durch die geometrische Folge $(q^n)_n$ mit $1/|z| < (1+|z|)/(2|z|) =: q < 1$ (!) dominiert wird und daher wegen **Satz 6.2 (3)** gegen 0 konvergiert. Da $(\sqrt[n]{n^k})_n$ von oben gegen 1 konvergiert, wäre $(1/|z|^n)_n$ eine zu scharfe obere Schranke, die $(n^k/z^n)_n$ nicht dominiert. Daher "weichen" wir diese obere Schranke etwas "auf", indem wir stattdessen $(q^n)_n$ wählen.
Wegen $\sqrt[n]{n^k} \to 1$, wenn $n \to \infty$, (s.o.), finden wir zu $\varepsilon := (|z|-1)/2$ ein $n_0(\varepsilon)$, dass

$$\sqrt[n]{n^k} \leqslant 1 + \varepsilon = \frac{1+|z|}{2}$$

für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Für $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt somit

$$0 \leqslant \left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leqslant \left(\frac{1+|z|}{2|z|}\right)^n = q^n$$

und daher

$$0 \leftarrow 0 \leqslant \left|\frac{n^k}{z^n}\right| \leqslant q^n \to 0$$

wenn $n \to \infty$. Mit **Satz 6.2 (3)** folgt das Behauptete.

Aufgabe 16 (Tutorium)

Untersuchen Sie für die jeweilige Folgenvorschrift den Grenzwert der so definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n := \sqrt{2n^2 + 3n} - n$.

b) $a_n := \sqrt[3]{27n^3 + 2n^2 + 1} - 3n$.

c) $a_n := \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

d) $a_n := \dfrac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

e) $a_n := \dfrac{1 + n^3 - 2n^4}{n3^n - 4n^2}$.

f) $a_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

g) $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

h) $a_n := \sqrt[n]{n!}$.

i) $a_n := \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

j) $a_n := \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, $a, b, c \geqslant 0$.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen, dass $(a_n)_n$ divergiert, indem wir zeigen, dass es unbeschränkt ist. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{2n^2+3n} - n \geqslant \sqrt{2n^2} - n = (\sqrt{2}-1)n.$$

Da $(\sqrt{2}-1) > 0$ gilt, wächst also $(a_n)_n$ und ist wegen der Unbeschränktheit der Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nicht beschränkt.

b) Wir versuchen analog zur vorherigen Aufgabe vorzugehen, indem wir **Formel 4.9 (1)** verwenden. Zunächst gilt für nicht-negative $a, b \geqslant 0$

$$a - b = \sqrt[3]{a}^3 - \sqrt[3]{b}^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2).$$

Diese Tatsache wollen wir im Folgenden ausnutzen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} - 3n = \frac{(\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} - 3n)(\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1}^2 + 3n\cdot\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} + (3n)^2)}{\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1}^2 + 3n\cdot\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} + (3n)^2} \\ &= \frac{2n^2+1}{\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1}^2 + 3n\cdot\sqrt[3]{27n^3+2n^2+1} + 9n^2} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{27+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}^2 + 3\cdot\sqrt[3]{27+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} + 9} \\ &\to \frac{2}{27}, \end{aligned}$$

wenn $n \to \infty$. Dabei haben wir im vorletzten Schritt mit n^2 gekürzt und schließlich **Satz 6.2 (4)** verwendet.

c) Nach Vorlesung gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Somit folgt

$$a_n = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

d) Mit **Formel 4.9 (1)** gilt wiederum

$$a_n = \frac{(n+2)^{42} - n^{42}}{n^{41}} = \frac{(2+n-n)\sum_{k=0}^{41}(2+n)^{41-k}n^k}{n^{41}} = 2\sum_{k=0}^{41}\Bigg(\underbrace{\frac{2+n}{n}}_{\to 1 (n\to\infty)}\Bigg)^{41-k} \to 2\cdot 42 = 84 \qquad (n \to \infty).$$

e) Wir benutzen **Aufgabe 15 b)** um zu sehen, dass

$$a_n = \frac{1+n^3-2n^4}{n3^n - 4n^2} = \frac{\frac{1}{n3^n} + \frac{n^2}{3^n} - \frac{2n^3}{3^n}}{1 - \frac{4n}{3^n}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

f) Es gilt (für $n \geqslant 2$)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})} \to \frac{1}{\mathrm{e}\cdot 1} = \mathrm{e}^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

g) Es gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n\cdot n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

Der Ausdruck in der Wurzel ist eine Teilfolge der Folge $((1+\frac{1}{n})^n)_n$, welche gegen e konvergiert beziehungsweise deren Folgenglieder nach Vorlesung alle zwischen 2 und 3 liegen. Damit folgt

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{2} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{3} \to 1$$

für $n \to \infty$ und damit $a_n \to 1$ für $n \to \infty$ nach **Satz 6.2(3)**.

h) Konvergente Folgen sind nach **Aufgabe 14 a)** beschränkt. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, womit es nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(2k)! = \underbrace{2k\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)}_{k\text{ Faktoren, jeder }\geq k}\cdot\underbrace{k\cdot\ldots\cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$a_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen, laut Vorlesung, nicht nach oben beschränkt sind, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt.

i) Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=2}^{n-1}\frac{k}{k+1}\frac{k+1}{k}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Dabei haben wir einen Indexshift von der ersten zur zweiten Zeile durchgeführt (vgl. **Aufgabe 9 a) (ii)**).

j) Es gilt

$$\max\{a,b,c\} = \sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leqslant \sqrt[n]{3}\sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \to \max\{a,b,c\} \qquad (n\to\infty),$$

also $a_n \to \max\{a,b,c\}$ für $n \to \infty$ nach **Satz 6.2 (3)**.

Aufgabe 17 (Übung)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über eine beliebige reellwertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $\alpha_n := \sup\{a_k :\ k \geqslant n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, monoton fallend gegen a konvergiert.

b) Hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungswert a und ist $k \in \mathbb{N}$, so hat auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := a_{n+k}$ für alle $\mathbb{N}$ den Häufungswert a.

Lösungsvorschlag

a) $(\alpha_n)_n$ ist monoton fallend, denn wie in der Vorlesung gesehen, gilt für $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dass $\sup A \leqslant \sup B$. Somit folgt

$$\alpha_{n+1} = \sup\{a_k :\ k \geqslant n+1\} \leqslant \sup\{a_k :\ k \geqslant n\} = \alpha_n$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(\alpha_n)_n$ ist monoton fallend. Nun zeigen wir die Konvergenz gegen a. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Sei nun $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Nach dem eben Gesehenen gilt also $a - \frac{\varepsilon}{2} < a_k < a + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geqslant n$, womit $a - \frac{\varepsilon}{2}$ eine untere und $a + \frac{\varepsilon}{2}$ eine obere Schranke der Menge $\{a_k :\ k \geqslant n\}$ ist. Deshalb gilt nach Definition

$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \alpha_n = \inf\{a_k :\ k \geqslant n\} \leqslant \sup\{a_k :\ k \geqslant n\} \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2},$$

somit $|\alpha_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Dies bedeutet nach Definition gerade die Konvergenz von $(\alpha_n)_n$ gegen a.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und a ein Häufungswert von $(a_n)_n$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ von $(a_n)_n$, die gegen a konvergiert. Da $(n_j)_j$ nach Definition der Teilfolge streng wachsend ist, gibt es einen Index j_0 derart, dass $n_{j_0} > k$ gilt. Definiere nun

$$m_j \ :=\ n_{j-1+j_0} - k$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. $(m_j)_j$ ist nun ebenfalls eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen und $(b_{m_j})_j$ konvergiert gegen a. Sei nämlich $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Konvergenz von $(a_{n_j})_j$ ein Index $J \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_{n_j} - a| < \varepsilon$ für alle $j \geqslant J$. Das bedeutet aber gerade

$$|b_{m_j} - a| \ =\ |a_{m_j+k} - a| \ =\ |a_{n_{j-1+j_0}} - a| \ < \varepsilon$$

für alle $j \geqslant J$, da $j - 1 + j_0 \geqslant J$ für alle $j \geqslant J$ gilt. Insbesondere ist also $(b_{m_j})_j$ eine gegen a konvergente Teilfolge von $(b_n)_n$ und damit ist a ein Häufungswert von $(b_n)_n$.

Aufgabe 18 (Tutorium)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche komplexwertige Funktion derart, dass $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Konvergiert dann auch $(a_n)_n$?

b) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe jedes $z \in \{\pm 1, (\pm 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}, \pm\mathrm{i}, (\mp 1 \pm \mathrm{i})/\sqrt{2}\}$ als Häufungswerte.

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe jede natürliche Zahl als Häufungswert.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe keinen Häufungswert und sei weder nach oben noch nach unten beschränkt.

(iv) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen 2015, sei aber nicht monoton.

(v) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ habe 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiere $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Lösungsvorschlag

a) Die Antwort lautet: Nicht immer. Ist $(a_n)_n$ konvergent, so konvergieren auch $(a_{2n})_n$ und $(a_{3n})_n$ gegen denselben Grenzwert. Wählen wir jedoch $a_{2n} := a_{3n} := 1$ und $a_{6n-5} := 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und die sonstigen Folgeglieder beliebig, so konvergiert $(a_n)_n$ nicht, obwohl $(a_{2n})_n$ sowie $(a_{3n})_n$ gegen 1 konvergieren. Beachte dabei, dass $6n-5$ nicht durch 2 oder 3 teilbar ist.

b) Es wird jeweils ein Beispiel genannt, von denen es noch viele mehr gibt.

(i) $a_n := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(b_n)_n := (1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,\ldots)$.

(iii) $c_n := (-1)^n n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $d_n := 2015 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(v) $e_{2k} := 0$, $e_{2k+1} := k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.