KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
09.11.2015

HÖHERE MATHEMATIK FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

4. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 19 (ÜBUNG)

a) Zeigen Sie, dass eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitze höchstens einen Häufungswert. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits konvergiert.

c) Es sei

$$a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige reelle Folgen $(\alpha_n)_n$ und $(\beta_n)_n$ mit $\alpha_n \leqslant \beta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \beta_n$ und $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \beta_n$ gelten.

AUFGABE 20 (TUTORIUM)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche komplexe Folge, dass $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Zeigen Sie, dass für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty} (-a_n)$$

gilt.

c) Bestimmen Sie für die jeweilige Folgenvorschrift $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Seien für $n \in \mathbb{N}$

(i) $a_n := |b_n|$, wobei

$$b_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n = 4k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1+\mathrm{i}^n}{\sqrt{2}}\right)^n, & n \neq 4k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

(ii) $a_n = (1 + (-1)^n)^n - n!$,

(iii) $$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2^n, & n = 3k-2 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases} ,$$

Aufgabe 21 (Übung)

Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ M_n eine abzählbare Menge und

$$\bigcup_{j=1}^{1} M_j := M_1 \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^{n+1} M_j := \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j\right) \cup M_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcup_{j=1}^{n} M_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist.
Bemerkung: Es gilt sogar, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$ (vgl. Aufgabe 3a)) abzählbar ist.

Aufgabe 22 (Tutorium)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(i) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

(iii) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 23 (Übung)

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{konvergiert.}$$

b) Sei $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q > 1.$$

Aufgabe 24 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz und bestimmen Sie bei **b)**, **d)** und **i)** den Reihenwert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n-k}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3-5n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N}, |q| < 1$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$

Am **27.11.2015** findet die Übung im Redtenbachhörsaal (Geb. 10.91) statt.