Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
20.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 19 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitze höchstens einen Häufungswert. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bereits konvergiert.

c) Es sei

$$a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebige reelle Folgen $(\alpha_n)_n$ und $(\beta_n)_n$ mit $\alpha_n \leqslant \beta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \beta_n$ und $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \beta_n$ gelten.

Lösungsvorschlag

a) "$\Rightarrow$": Diese Implikation haben wir bereits in der Vorlesung gesehen. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir an dieser Stelle das Argument. Sei $(a_n)_n$ konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Dann gilt für $m, n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge ist.
"$\Leftarrow$": Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge. Wir verwenden die Beobachtung, dass eine Cauchyfolge stets beschränkt ist und dass die Konvergenz einer Teilfolge einer Cauchyfolge bereits die Konvergenz der ursprünglichen Folge impliziert.
Wähle dazu zunächst $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad \forall m, n \geqslant N_1.$$

Dann gilt für alle $n \geqslant N_1$

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N_1}| + |a_{N_1}| < 1 + |a_{N_1}| =: C < \infty$$

Da die ersten $N_1 - 1$ Folgeglieder von $(a_n)_n$ durch das Maximum ihrer Beträge beschränkt sind, ist folglich die gesamte Folge beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt nun,

dass eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ existiert, die gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Wir zeigen als Nächstes, dass dann bereits $(a_n)_n$ gegen a konvergiert.
Wegen der Cauchyeigenschaft von $(a_n)_n$ dürfen wir ein $N_0 \in \mathbb{N}$ derart wählen, dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2$$

für alle $n, m \geqslant N_0$ gilt. Danach wählen wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $n_{k_0} \geqslant N_0$ und

$$|a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten (wieso ist dies möglich?). Damit gilt für $n \geqslant N_0$

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist.

b) Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, besitzt es nach dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** mindestens einen Häufungswert und wegen der Voraussetzung daher genau einen Häufungswert. Wir bezeichnen diesen Häufungswert mit $a \in \mathbb{C}$. Wie wir in **Aufgabe 18 b) (v)** gesehen haben, genügt es nicht für eine Folge, nur einen Häufungswert (in $\mathbb{C}$) zu haben, um die Konvergenz zu erzwingen. Hier geht entscheidend die Forderung der Beschränktheit ein. Wir werden durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, dass $(a_n)_n$ gegen a konvergiert.
Wir nehmen also an, dass $(a_n)_n$ nicht gegen a konvergiert, d.h. nach Definition der Konvergenz, es existieren ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. Wir wählen ein solches $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ derart, dass

$$|a_{n_k} - a| \geqslant \varepsilon \quad (1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da nun auch $(a_{n_k})_k$ beschränkt ist, existiert (nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß) eine weitere Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_l$, die gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wegen (1) gilt im Grenzfall $l \to \infty$ und wegen **Satz 6.2 (1)** bzw. **(4)**

$$|b - a| \leftarrow |a_{n_{k_l}} - a| \geqslant \varepsilon,$$

d.h. $|b - a| \geqslant \varepsilon$, insbesondere also $b \neq a$. Da nun $(a_{n_{k_l}})_l$ auch eine Teilfolge von $(a_n)_n$ ist und diese gegen b konvergiert, ist $b \neq a$ nach Definition ein Häufungswert. Dies ist ein Widerspruch, da wir angenommen haben, dass $(a_n)_n$ höchstens einen Grenzwert hat. Deswegen konvergiert $(a_n)_n$ gegen a.

c) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Seien dazu $(\alpha_n)_n$ und $(\beta_n)_n$ reelle Folgen mit $\alpha_n \leqslant \beta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $b_n := \sup\{\beta_k \big| k \geqslant n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $k \geqslant n$

$$\alpha_k \leqslant \beta_k \leqslant b_n,$$

also insbesondere $\sup\{\alpha_k | k \geqslant n\} \leqslant b_n$. Im Grenzfall $n \to \infty$ erhalten wir somit $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \beta_n$. Mithilfe von Aufgabe **20 a)** erhalten wir dann

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = -\limsup_{n\to\infty}(-\alpha_n) \leqslant -\limsup_{n\to\infty}(-\beta_n) = \liminf_{n\to\infty} \beta_n.$$

Nun zur eigentlichen Aufgabe. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$-1+\frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant 1+\frac{1}{n}$$

gilt. Mit dem eben Gezeigten und mit **Satz 6.9 (1)** und **(5)** gilt

$$\begin{aligned}-1 &= \lim_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,\end{aligned}$$

d.h., $\liminf_{n\to\infty} a_n \geqslant -1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant 1$. Außerdem gelten

$$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \to -1 \quad \text{und} \quad a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1,$$

wenn $n \to \infty$. Damit sind -1 und 1 Häufungswerte von $(a_n)_n$. Mit **Satz 6.9 (4)** gelten dann

$$-1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(a_n) \leqslant -1 \quad \text{und} \quad 1 \geqslant \limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(a_n) \geqslant 1$$

und deswegen sind $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.
<u>Bemerkung:</u> Es gilt ganz allgemein für alle Häufungswerte a in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ einer reellen Folge $(a_n)_n$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Aufgabe 20 (Tutorium)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche komplexe Folge, dass $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Zeigen Sie, dass für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$$

gilt.

c) Bestimmen Sie für die jeweilige Folgenvorschrift $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Seien für $n \in \mathbb{N}$

(i) $a_n := |b_n|$, wobei

$$b_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n = 4k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1+\mathrm{i}^n}{\sqrt{2}}\right)^n, & n \neq 4k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(ii) $a_n = (1+(-1)^n)^n - n!$,

(iii) $a_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{2^n}, & n = 3k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2^n, & n = 3k-2 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases},$

Lösungsvorschlag

a) Die Antwort lautet: Nicht immer. Konvergiert $(a_n)_n$ bereits, so ist $(a_{n+1} - a_n)_n$ eine Nullfolge. Definiert man andererseits

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, wenn $n \to \infty$. Jedoch divergiert nach Vorlesung bekanntermaßen die harmonische Reihe, welche wir im Grenzfall $n \to \infty$ erhalten.

b) Aus dem Beweis von Aufgabe **7 b)** folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\inf\{a_k : k \geqslant n\} = -\sup\{-a_k : k \geqslant n\}$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung.

c) (i) Ist $n \neq 4k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathrm{i}^n \in \{\pm\mathrm{i}, -1\}$ (wieso?). Dann gilt für $n \neq 4k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1+\mathrm{i}^n}{\sqrt{2}}\right| \leqslant \frac{|1 \pm \mathrm{i}|}{\sqrt{2}} = 1.$$

Daher gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leqslant \frac{3}{2}$, also nach dem Hinweis von Aufgabe **19 c)** auch $\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant 3/2$. Außerdem gilt $(a_{4n})_n = 3/2 \to 3/2$, wenn $n \to \infty$, also ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3/2.$$

Umgekehrt ist $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_{4n+2} = 0 \to 0$, wenn $n \to \infty$, und daher

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen der Monotonie der Potenz (**Lemma 4.13**)

$$a_n \leqslant 2^n - n! = n!\left[\left(\frac{2}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n - 1\right].$$

Wegen $\sqrt[n]{n!} \to \infty$, wenn $n \to \infty$, (vgl. Aufgabe **16 h)**) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geqslant n_0$

$$\frac{2}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Wegen der Monotonie der Potenz gilt dann wiederum

$$\left(\frac{2}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2}$$

für alle $n \geqslant n_0$. Insbesondere gilt für alle $n \geqslant n_0$

$$a_n \leqslant n!\left[\left(\frac{2}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n - 1\right] \leqslant -n!/2$$

und damit ist

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(-n!/2) = -\infty,$$

d.h. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(iii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geqslant 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Damit und mit $a_{3n} = 1 + 2^{-n} \to 1$, wenn $n \to \infty$, gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1$. Da $(a_{3k-2})_k$ nach oben unbeschränkt ist, ist dies auch die ganze ganze Folge $(a_n)_n$ und daher ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Aufgabe 21 (Übung)

Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ M_n eine abzählbare Menge und

$$\bigcup_{j=1}^{1} M_j := M_1 \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^{n+1} M_j := \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j\right) \cup M_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcup_{j=1}^{n} M_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Bemerkung: Es gilt sogar, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$ (vgl. Aufgabe 3a)) abzählbar ist.

Lösungsvorschlag

Da dies eine Aussage über natürliche Zahlen ist und die gegebenen Terme rekursiv definiert sind, bietet sich ein Induktionsbeweis an.

Induktionsanfang: Trivialerweise ist $\bigcup_{j=1}^{1} M_j = M_1$ abzählbar. Der erste nicht-triviale Fall erscheint bei $n = 2$, den wir auch einsehen möchten. Da M_1 und M_2 abzählbar sind, existieren surjektive Abbildungen $f_1 : \mathbb{N} \to M_1$ und $f_2 : \mathbb{N} \to M_2$. Dann definieren wir

$$f : \mathbb{N} \to M_1 \cup M_2, \quad n \mapsto \begin{cases} f_1((n+1)/2), & \text{falls } n = 2k-1 \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ f_2(n/2), & \text{falls } n = 2k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass f surjektiv ist.

Induktionsschluss: Sei nun für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{j=1}^{n} M_j$ abzählbar (Induktionsvoraussetzung). Dann ist $(n \to n+1)$

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{n} M_j\right) \cup M_{n+1}$$

nach dem Induktionsanfang und wegen der Induktionsvoraussetzung abzählbar.

Aufgabe 22 (Tutorium)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Lösungsvorschlag

a) Für $n = 1$ ist $a_n = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $\sqrt{n} < n$ bzw. $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Deshalb gilt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 ist klar wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Wäre die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent, so wäre auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konvergent (wieso gilt das Gleichheitszeichen?). Aus der Vorlesung ist jedoch bekannt, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist. Also muss die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergieren.

c) Die Folge $(a_n)_n$ ist nicht monoton. Dies könnten wir auch relativ schnell (aber unschön) zeigen, indem wir die Differenzen $a_{2k} - a_{2k+1}$ und $a_{2k+1} - a_{2k+2}$ betrachten, es ist jedoch nicht nötig, denn: Wäre $(a_n)_n$ monoton, so wären alle Voraussetzungen des Leibnitzkriteriums erfüllt und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ würde konvergieren, ein Widerspruch zu **b)**.

Aufgabe 23 (Übung)

a) Beweisen Sie den *Cauchyschen Verdichtungssatz*: Ist (a_n) eine monoton fallende Folge mit $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{konvergiert.}$$

b) Sei $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \quad \text{konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad q > 1.$$

Lösungsvorschlag

a) Seien $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$.

Wir nehmen zunächst an, dass $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Für $n \leq 2^i$ gilt (da $(a_n)_n$ monoton fallend ist)

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^i} + \ldots + a_{2^{i+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^i a_{2^i} = t_i \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, da $(s_n)_n$ monoton wächst ($a_n \geqslant 0$) und nach oben beschränkt ist.

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Für $n > 2^i$ gilt dann

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{i-1}+1} + \ldots + a_{2^i}) \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{i-1} a_{2^i} = \frac{1}{2} t_i.$$

Also konvergiert dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$, da $(t_i)_i$ monoton wächst ($a_n \geqslant 0$) und nach oben beschränkt ist.

b) Mit $a_k := \frac{1}{k^q}$ haben wir

$$2^k a_{2^k} = 2^k (2^k)^{-q} = 2^{(1-q)k}.$$

Damit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{mit } x := 2^{1-q}.$$

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$, also wenn $q > 1$. Mit Teil **a)** konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$ also genau dann, wenn $q > 1$.

Aufgabe 24 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz und bestimmen Sie bei **b)**, **d)** und **i)** den Reihenwert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n-k}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3-5n+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n, \quad k \in \mathbb{N}, |q| < 1$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$

Lösungsvorschlag

a) Sei $a_n := (\frac{n-1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt (siehe **Aufgabe 16 f)**)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist a_n keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^n$ divergent.

b) Sei $a_n := (-1)^n \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$. Es gilt

$$a_n = (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot (2^3)^n}{(3^2)^n} = \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{9}\right)^n.$$

Damit erhalten wir wegen eine geometrische Reihe (bis auf das fehlende nullte Reihenglied), die wegen $|-8/9| < 1$ konvergiert, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{8}{9})} - 1\right) = -\frac{4}{17}.$$

Außerdem konvergiert die Reihe auch absolut mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}} - 1\right) = 4.$$

c) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$. Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{2n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{2n+1} \geqslant \frac{1}{3n}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ divergiert (als Vielfaches der harmonischen Reihe), konvergiert die Reihe nicht absolut. Es gilt allerdings $a_n = (-1)^n b_n$ mit $b_n = \frac{1}{2n+(-1)^n}$. Diese Folge ist positiv und konvergiert wegen

$$\frac{1}{2n+(-1)^n} \leqslant \frac{1}{2n-1} \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gegen 0. Außerdem ist sie monoton fallend wegen

$$b_{2k} - b_{2k+1} = \frac{1}{2(2k)+1} - \frac{1}{2(2k+1)-1} = 0,$$

$$b_{2k+1} - b_{2k+2} = \frac{1}{2(2k+1)-1} - \frac{1}{2(2k+2)+1} = \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} = \frac{4}{(4k+1)(4k+5)} > 0$$

für $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Leibnitzkriterium konvergiert die Ausgangsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ demnach.

d) Definiere

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-n-k} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1^{n-k} = 2^{-n}(1+1/2)^n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Dabei haben wir im drittletzten Schritt den binomischen Lehrsatz (vgl. Aufgabe **9 b)**) verwendet. Infolgedessen konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (auch absolut), da es eine geometrische Reihe ist. Der Reihenwert beträgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

e) Sei $a_n := \frac{n^2+3}{n^3-5n+1}$. Es gilt

$$a_n \geqslant \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}.$$

Dabei haben wir sehr grob 1 mit n^3 nach oben und $-5n$ mit 0 nach unten abgeschätzt. Nach dem Minorantenkriterium divergiert folglich die betrachtete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

f) Sei $a_n := n^k q^n$. Falls $q = 0$ ist, so ist $(a_n)_n$ die konstante Nullfolge. Sei nun $q \neq 0$. Wir definieren $z := 1/q$. Es gilt $|z| > 1$. Nach dem Beweis Aufgabe **15 b)** finden wir einen Index n_0, ab dem

$$\frac{\sqrt[n]{n}}{|z|} \leqslant \frac{1+|z|}{2|z|} < 1$$

für alle $n \geqslant n_0$ gilt. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ absolut, da es durch eine geometrische Reihe majorisiert wird. Die restlichen Reihenterme $\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n$ sind endlich. Daher konvergiert dann auch die gesamte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

g) Sei $a_n := \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2})} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{3n^{7/6}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ konvergiert nach Aufgabe **23 b)** und daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium.

h) Sei $a_n := \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert nach Aufgabe **23 b)** nicht absolut, da $|a_n| = \frac{1}{n^{1/2}}$. Sei $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{2k} = \frac{\mathrm{i}^{2k}}{\sqrt{2k}} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k}}.$$

Sei nun $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{\sqrt{2k+1}} = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}.$$

Da die beiden Folgen $(\frac{1}{\sqrt{2k}})_k$ und $(\frac{1}{\sqrt{2k+1}})_k$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnitzkriterium und damit per definitionem auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$.

i) Sei $a_n := \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$. Es gilt

$$0 \leqslant a_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{N+1} - \frac{1}{N+2} \to \frac{5}{2} \quad (N \to \infty). \end{aligned}$$

Das heißt, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut und der Reihenwert beträgt 5/2.