Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2014/2015
16.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$.

a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

Aufgabe 26 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n!)!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{3^{n^2+1}}$

Aufgabe 27 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

jedoch divergiert.

b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus **a)** mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Sei $|z|<1$. Bestimmen Sie den Reihenwert, indem Sie die Reihen geeignet als Cauchyprodukt darstellen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{2n}$

Aufgabe 29 (Übung)

a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf $\mathbb{R}$ bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

b) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(e^{1/n} - 1\right) = 1.$$

c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

$$\cos(z) = \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

d) $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Aufgabe 31 (Übung)

a) Welche Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2}$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin z, \quad z_0 = 1$

(ii) $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{\frac{2}{3}}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 32 (Tutorium)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-2i)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Am **27.11.2015** findet die Übung im Redtenbachhörsaal (Geb. 10.91) statt.