Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
27.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25 (Übung)

Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$.

a) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

b) Was kann man mit dem Wurzelkriterium über die Konvergenz der obigen Reihe sagen?

Lösungsvorschlag

Definiere $a_n := 2^{-n+(-1)^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Es gilt für gerades $n \in \mathbb{N}$

$$c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{-n-2}}{2^{-n+1}} = \frac{1}{8},$$

sowie für ungerades $n \in \mathbb{N}$

$$c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{-n}}{2^{-n-1}} = 2.$$

Damit gilt $\limsup_{n\to\infty} c_n = 2 > 1$ sowie $\liminf_{n\to\infty} c_n = 1/8 < 1$. Damit lässt sich über das Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe machen.

b) Es ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 2^{-1+(-1)^n/n} = \frac{1}{2}.$$

Den Grenzwert erhalten wir, indem wir folgende Abschätzung und den Hinweis von Aufgabe **19 c)** verwenden:

$$2^{-1}\sqrt[n]{2^{-1}} = 2^{-1-1/n} \leqslant 2^{-1+(-1)^n/n} \leqslant 2^{-1}\sqrt[n]{2}.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 26 (Tutorium)

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf (absolute) Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n!)!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{3^{n^2+1}}$

Lösungsvorschlag

a) Sei $a_n := (\frac{n-1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt (siehe **Aufgabe 16 f)**)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0 \qquad (n \to \infty).$$

Damit ist a_n keine Nullfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^n$ divergent.

b) Definiere $a_n := \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!(3n)^n n!}{(2n)!(3(n+1))^{n+1}(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{4}{3\mathrm{e}} < 1,$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

c) Sei $a_n := \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$. Da $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt, ist $\sqrt[n]{n}$ beschränkt, also $\sqrt[n]{n} \leqslant C$ für eine Konstante $C > 0$. Somit folgt

$$|a_n| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n!} \leqslant \frac{C}{n!}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n!}$ konvergiert (gegen $C(\mathrm{e}-1)$, siehe Vorlesung), konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

d) Definiere $a_n := 2^n n!/n^n$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{2^n n!(n+1)^{n+1}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{2}{\mathrm{e}} < 1,$$

wenn $n \to \infty$ (siehe **b)**). Daher konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

e) Sei $a_n := \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{2} > 1 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium.

f) Definiere $a_n := (\mathrm{e}^{1/n} - 1)/\sqrt{n}$. Zunächst gilt nach **Aufgabe 29 b)** $n(\mathrm{e}^{1/n} - 1) \to 1$, wenn $n \to \infty$. Das heißt dann nach Definition der Konvergenz, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass

$$\left|n\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)\right| \leqslant \frac{3}{2}$$

für alle $n \geqslant n_0$ gilt. Für diese $n \geqslant n_0$ gilt dann

$$|a_n| = \left|\frac{\mathrm{e}^{1/n} - 1}{\sqrt{n}}\right| = \left|n\left(\mathrm{e}^{1/n} - 1\right)\right|\frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \frac{3}{2n^{3/2}}.$$

Da nach **Aufgabe 23 b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konvergiert, konvergiert insbesondere $\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-3/2}$. Damit konvergiert dann $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, also auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut nach dem Majorantenkriterium.

g) Definiere

$$a_n := \begin{cases} \frac{n}{n!}, & \text{falls } n = k! \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir behaupten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n!)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ zunächst fest. Dann gibt es genau ein (!) $k_n \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_n! \leqslant n < (k_n + 1)!$. Insbesondere gilt $n \to \infty$ genau dann, wenn $k_n \to \infty$. Es gilt für die Partialsumme

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_n = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{j!}{(j!)!} \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{(j!)!},$$

wenn $n \to \infty$. Damit ist die Behauptung gezeigt. Als Nächstes verwenden wir die Abschätzung

$$|a_n| \leqslant \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da nach Vorlesung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \overset{Indexshift}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e},$$

konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium absolut.

h) Definiere $a_n := \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)! \prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{n! \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2},$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

i) Definiere $a_n := \frac{(-n)^n}{3^{n^2+1}}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{3^{n+1/n}} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium. Der Leser begründe, warum diese Konvergenz gilt.

Aufgabe 27 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

jedoch divergiert.

b) Weisen Sie nach, dass das Cauchyprodukt der konvergenten Reihe aus **a)** mit sich selbst divergiert.

Lösungsvorschlag

a) Die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right). \qquad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.

b) Wie wir gesehen haben, ist die konvergente Reihe aus **a)** gegeben durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Sei nun $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}}.$$

Mit

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad (\text{für } a, b > 0)$$

folgt

$$\begin{aligned} |c_n| &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1} \cdot \sqrt{k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}(n-k+1+k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2+2/n}{1+2/n} \to 2 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Demnach ist $(c_n)_n$ keine Nullfolge und damit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent.

Aufgabe 28 (Tutorium)

Sei $|z| < 1$. Bestimmen Sie den Reihenwert, indem Sie die Reihen geeignet als Cauchyprodukt darstellen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{2n}$

Lösungsvorschlag

Der Konvergenzradius beider Potenzreihen ist 1, da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Somit sind beide Reihen für $|z| < 1$ absolut konvergent und für $|z| > 1$ divergent. Für $|z| = 1$ ist der Betrag der Folgenglieder, also n bzw. n^2, keine Nullfolge, weshalb auch dort Divergenz folgt (siehe auch Vorlesung). Kommen wir nun zum Reihenwert, wobei ab nun $|z| < 1$ vorausgesetzt sei.

a) Es gilt (siehe Vorlesung)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Somit folgt $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$. Die geforderte Reihe müssen wir nun nur noch leicht umformen, um auf diesen nun bekannten Reihenwert zurückgreifen zu können. Wir berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \overset{\text{Index-Shift}}{=} z \cdot \sum_{n\geqslant 0} (n+1) z^n.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{n} k = n^2 + n \Leftrightarrow n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n\right)(z^2)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}((z^2)^{n-k})(k(z^2)^k) - \sum_{n=0}^{\infty} n(z^2)^n \\ &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} k(z^2)^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} n(z^2)^n.\end{aligned}$$

Mit Teil **a)** erhalten wir schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z^2)^n = 2\cdot\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{z^2}{(1-z^2)^2} - \frac{z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\left(\frac{2}{1-z^2} - 1\right) = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{z^2(1+z^2)}{(1-z^2)^3}.$$

Aufgabe 29 (Übung)

a) Rechnen Sie nach, dass die aus der Vorlesung auf $\mathbb{R}$ bekannten Formeln

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,$$

auch für $z \in \mathbb{C}$ gelten.

b) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(e^{1/n} - 1\right) = 1.$$

c) Beweisen Sie, dass für $z = x + iy$

$$\sin(z) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

$$\cos(z) = \cos(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - i\sin(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right),$$

und schließen Sie daraus, dass die beiden Funktionen auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt sind.

Lösungsvorschlag

a) Wir fangen auf der rechten Seite der ersten Gleichung an und beobachten, dass

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{i}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}) = e^{iz}.$$

Zudem gilt

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})) = 1.$$

b) Nach **Satz 7.14 (2)** gilt

$$\left|n\left(e^{1/n} - 1\right) - 1\right| = \left|\frac{e^{1/n} - 1}{1/n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n}e^{1/n} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n} - 1\right) = 1.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}) = \frac{1}{2i}((\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} - (\cos(x) - i\sin(x))e^{y}) \\ &= \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \cos(x)\left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right) = \sin(x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i\cos(x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) = \frac{1}{2}((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{-y}+(\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x))\mathrm{e}^{y})\\ &= \cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}\right)+\mathrm{i}\sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{y}}{2}\right) = \cos(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}\right)-\mathrm{i}\sin(x)\left(\frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2}\right).\end{aligned}$$

Für die Unbeschränktheit begeben wir uns auf die imaginäre Achse (also $x = 0$ und somit $\sin(x) = 0$, $\cos(x) = 1$). Es gilt für $y > 0$ (also $0 < \mathrm{e}^{-y} < \mathrm{e}^{0} = 1 < \mathrm{e}^{y}$ wegen Monotonie)

$$\begin{aligned}|\sin(\mathrm{i}y)| &= \frac{\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y}}{2}-\frac{1}{2},\\ |\cos(\mathrm{i}y)| &= \frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y}}{2}\end{aligned}$$

Da nach Vorlesung $\sup\{\mathrm{e}^{y} : y \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $0 < \mathrm{e}^{y} \leqslant 1$ für $y \leqslant 0$, gilt auch $\sup\{\mathrm{e}^{y} : y > 0\} = \infty$. Somit existiert zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $y_C > 0$ mit $\mathrm{e}^{y_C} > 2C + 1$, also $\frac{\mathrm{e}^{y_C}}{2} > \frac{\mathrm{e}^{y_C}}{2} - \frac{1}{2} > C$ und somit sowohl $|\sin(\mathrm{i}y)| > C$ als auch $|\cos(\mathrm{i}y)| > C$.

Aufgabe 30 (Tutorium)

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

d) $\cos(z) + \cos(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Lösungsvorschlag

a) Das Additionstheorem $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ liefert für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin(z)\cos(z) + \cos(z)\sin(z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ die Gleichung

$$\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos(z)\cos(z) - \sin(z)\sin(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

Wie wir in **Aufgabe 29 a)** gesehen haben, gilt die aus der Vorlesung bekannte Formel $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ auch für jedes $z \in \mathbb{C}$. Somit folgt

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = \begin{cases}(1-\sin^2(z)) - \sin^2(z) = 1 - 2\sin^2(z),\\ \cos^2(z) - (1-\cos^2(z)) = 2\cos^2(z) - 1.\end{cases}$$

c) Nach den bekannten Additionstheoremen und **Aufgabe 29 b)** gilt

$$\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{z\pm w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\pm\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{w}{2}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right).$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\\
&\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)\right)\\
&\quad + 2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)\\
&\overset{\textbf{a), A29a)}}{=} \sin(z)+\sin(w)
\end{aligned}
$$

d) Es gilt

$$
\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right) &= 2\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)-\sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\right)\\
&= 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)-2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\\
&\overset{\textbf{A27 a)}}{=} 2\left(1-\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right)-2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\\
&= \left(1-2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)+\left(1-2\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\right) \overset{\textbf{b)}}{=} \cos(z)+\cos(w)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 31 (Übung)

a) Welche Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}z^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2}$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

(i) $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \sin z,\quad z_0=1$

(ii) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{-1,\frac{1}{2}\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \frac{1-z}{1-z-2z^2},\quad z_0=0$

Hinweis: In Teil (ii) hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,\frac{1}{2}\}$ weiter.

Lösungsvorschlag

a) (i) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1-2}{(n+1)!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}z^n.$$

Die erste Reihe ergibt e^z, die zweite liefert für $z=0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(\mathrm{e}^z - 1\big).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1\,, \qquad f(z) = \mathrm{e}^z - \frac{2\mathrm{e}^z - 2}{z} = \frac{(z-2)\mathrm{e}^z + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

(ii) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1).$$

b) (i) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + (z-1)) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)}.$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten (→ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 32 (Tutorium)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-2\mathrm{i})^n$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Lösungsvorschlag

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=-1$ und $x=1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n!|} = 1/\sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞, d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Reihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{|\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}|} = \begin{cases} \mathrm{e}^{2n/2n} = \mathrm{e}\,, & n \text{ gerade}\,, \\ \mathrm{e}^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2^n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm \mathrm{e}^{-1}$ ergibt sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n}.$$

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}\mathrm{e}^{-2n} = \mathrm{e}^{2n}\mathrm{e}^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung 1: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)}y^n$ betrachten. Diese Reihe hat Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.
Bemerkung 2: Man kann auch direkt das Wurzelkriterum auf $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$ anwenden. D.h., man betrachte

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}|} \;=\; \limsup_{n\to\infty} \mathrm{e}^{1+(-1)^n}|x|^2| \;=\; \mathrm{e}^2|x|^2.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert dann $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$ für alle $|x| < \mathrm{e}^{-1}$ und divergiert für alle $|x| > \mathrm{e}^{-1}$. Für die Randpunkte verwendet man die obige Diskussion.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n^2}|} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{|z|^{n^2}} = 2|z|^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^n z^{n^2}| = 2^n \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.