Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
23.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 33 (Übung)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x - n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0, \infty)$ bzw. $[a, \infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

c) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \sin(xn) \cdot \frac{x}{n}$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass es eine reelle Zahl $\pi \geqslant 3$ derart gibt, dass für alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$

$$\sin(k\pi/2) = 1$$

gilt.

d) Es sei

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}.$$

Bestimmen Sie die Menge I aller derjenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$ konvergiert. Konvergiert die Reihe auf $[0, 1]$ gleichmäßig?

Aufgabe 34 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, wobei $x \in [a, 1]$, $0 < a < 1$,

b) $f_n(x) = nx(1 - x)^n$, wobei $x \in [0, 1]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x)$, wobei $x \in (-1, 1]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, wobei $x \in \mathbb{R}$,

e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 35 (Übung)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\, x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$

Aufgabe 36 (Tutorium)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-9x^2+16x-4}{3x^3-10x^2+9x-2}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos(x)}\left(e^{5x}-e^{x}\right)$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-e^{x}}{x}$

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für (v) zunächst $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))/x^2$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in [0,1), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$

c) Definiere

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > \sqrt{2} \\ 0 & \text{, falls } x < \sqrt{2} \end{cases}.$$

Ist f stetig?