Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
04.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 33 (Übung)

a) Es sei

$$b(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{für } x < -1 \text{ oder } x > 1. \end{cases}$$

Wir definieren $f_n(x) = b(x-n)$ und $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Sei $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,\infty)$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf punktweise Konvergenz. Wieso kann sie nicht gleichmäßig konvergieren? Konvergiert sie auf $(0,\infty)$ bzw. $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig?

c) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \sin(xn) \cdot \frac{x}{n}$$

gegeben. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass es eine reelle Zahl $\pi \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass für alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$

$$\sin(k\pi/2) = 1$$

gilt.

d) Es sei

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}.$$

Bestimmen Sie die Menge I aller derjenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$ konvergiert. Konvergiert die Reihe auf $[0,1]$ gleichmäßig?

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen, dass $(f_n)_n$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Sei dazu zunächst $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt für alle $n \geqslant x+1$

$$f_n(x) \;=\; b(x-n) \overset{x-n\leqslant -1}{=} 0.$$

Insbesondere ist dann $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Das bedeutet aber gerade nach Definition, dass $(f_n)_n$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Damit kann $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen eine andere Funktion als die Nullfunktion streben, da gleichmäßige Konvergenz stets punktweise Konvergenz impliziert (siehe VL). Um einzusehen, dass $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, stelle man sich vor, dass im Grenzfall $n \to \infty$ $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig "nach unten gedrückt" wird. Diese informelle Sprache wollen wir mathematisch einsehen. Um dies zu zeigen, genügt es, eine untere Schranke $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ derart zu finden, dass

$$|f_n(x_n) - 0| \geqslant \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Anschaulich wird klar, dass wir eine solche Folge $(x_n)_n$ so konstruieren, indem wir z.B. mit dem Maximum von $(f_n)_n$ "mitlaufen". Genauer gilt für $x_n := n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x_n) - 0| = b(0) = 1.$$

Damit konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
Anders verhält sich dies bei $(g_n)_n$. Aus der punktweisen Konvergenz von $(f_n)_n$ folgt direkt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{1}{n} f_n(x) \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert auch $(g_n)_n$ punktweise gegen die Nullfunktion. Um die gleichmäßige Konvergenz einzusehen, verwenden wir **Satz 7.18 (1)**, nach dem es genügt, die Konvergenz von $(g_n)_n$ gegen die Nullfunktion unabhängig von der Auswertungsstelle zu erhalten. Es gilt nämlich für $x \in \mathbb{R}$

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|b(x-n)|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert $(g_n)_n$ also auch gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

b) Es gilt $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ fest gilt

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + x} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Diese ist im Gegensatz zur Funktionenfolge $(f_n)_n$ nicht stetig ($f(\frac{1}{n}) = 0 \neq 1 = f(0)$), womit die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann (**Satz 8.3**). Auch auf $(0, \infty)$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, da für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n > 0$ existiert (nämlich $x_n := \frac{1}{n}$) mit

$$|f_n(x_n) - 0| = \left|\frac{1}{1+1}\right| = \frac{1}{2} > 0.$$

Auf $[a, \infty)$ für $a > 0$ ist die Konvergenz jedoch gleichmäßig, denn für jedes $x \geqslant a$ gilt

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{1+nx}\right| \leqslant \frac{1}{1+na} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + a} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da die letzte Folge wieder unabhängig von $x \in \mathbb{R}$ ist und gegen Null konvergiert, ist die gleichmäßige Konvergenz gezeigt (**Satz 7.18 (1)**).

c) Wir zeigen, dass $(f_n)_n$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - 0| \leqslant \frac{x}{n} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$, wobei wir ausgenutzt haben, dass der reelle Sinus nach oben durch 1 beschränkt ist. Wir untersuchen das Verhalten des Graphen für wachsendes $n \in \mathbb{N}$. Man erkennt, dass die Amplitude des Graphen an jeder Stelle bei wachsendem n fällt, jedoch für festes $n \in \mathbb{N}$ die Amplitude bei wachsendem x wächst. Diesen Sachverhalt verwenden wir dafür, um zu zeigen, dass $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Die Idee ist, dass wir auf der reellen Achse mit den "Bäuchen", nämlich den Maxima, "mitlaufen". Dazu wählen wir $x_n := \frac{\pi}{2n}(2n+1)^2$. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ungerade ist, gilt nach dem Hinweis

$$|f_n(x_n) - 0| = \sin\Big((2n+1)^2\pi/2\Big)\frac{\pi(2n+1)^2}{2n^2} = \frac{\pi(2n+1)^2}{2n^2} \to 2\pi \neq 0$$

im Grenzfall $n \to \infty$. Damit konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Allgemein kann die Veranschaulichung der Funktionenfolge Hinweise auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz geben.

d) Zunächst gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0\mathrm{e}^{-k\cdot 0} = 0,$$

d.h. $0 \in I$ und $I \neq \emptyset$. Sei nun umgekehrt $x \in I$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx} = x\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{-x})^k.$$

Da dies eine geometrische Reihe ist, konvergiert sie genau dann, wenn $\mathrm{e}^{-x} < 1$. Dies ist nach **Satz 7.13 (3)** und **(4)** genau dann der Fall, wenn $x > 0$ (!). Insgesamt konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$ für alle $x \in [0, \infty)$, d.h., $I = [0, \infty)$. Es gilt

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Beachte

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1.$$

Insbesondere gilt für eine beliebige Nullfolge $(x_n)_n$ mit $x_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(x).$$

D.h., dass f in 0 nicht stetig ist. Insbesondere kann dann $\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$ nach **Satz 8.3** auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig gegen

$$\tilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

konvergieren.

Aufgabe 34 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen und -reihen jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf den angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x}$, wobei $x \in [a, 1]$, $0 < a < 1$,

b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, wobei $x \in [0, 1]$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$, wobei $x \in (-1, 1]$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, wobei $x \in \mathbb{R}$,

e) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ gegen die konstante Einsfuktion für $n \to \infty$. Da für alle $x \in [a, 1]$ sowie alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 1| &= |\sqrt[n]{n^2 x} - 1| = |\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + \sqrt[n]{n^2 a} - 1| \leq |\sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a}| + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| \\ &\overset{x \geqq a}{=} \sqrt[n]{n^2 x} - \sqrt[n]{n^2 a} + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| \overset{x \leqq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - \sqrt[n]{n^2 a} + |\sqrt[n]{n^2 a} - 1| =: \alpha_n \end{aligned}$$

gilt und $\alpha_n \to 0$ für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergent.
Wir betrachten nun auch den Fall $a = 0$. Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der gleichen Rechnung wie oben gilt für $x \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen f, wobei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt ist. Weil f nicht stetig in 0 ist, kann die Konvergenz wiederum nicht gleichmäßig sein (**Satz 8.3**).

b) Offenbar gilt $f_n(0) = f_n(1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1)$ ist mit $z := 1/x$ $|z| > 1$ und wir erhalten mit **Aufgabe 15 b)**

$$f_n(x) \;=\; x\frac{n}{z^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Obwohl diese Grenzfunktion stetig ist, liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Es gilt

$$|f_n(\tfrac{1}{n}) - 0| \;=\; n \cdot \tfrac{1}{n} \cdot (1 - \tfrac{1}{n})^n = (1 - \tfrac{1}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

(vgl. **Aufgabe 16 f)**). Das schließt die gleichmäßige Konvergenz aus.

c) Setzt man $x = 1$ in $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ ein, so ergibt sich der Wert 0. Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = x.$$

Die Funktionenreihe konvergiert also punktweise gegen die Funktion $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ x, & x \in (-1,1). \end{cases}$$

Da diese Funktion, im Gegensatz zu den Partialsummenfunktionen $s_N : (-1,1] \to \mathbb{R}$, die durch $s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x^n(1-x)$ gegeben sind, nicht stetig in $x = 1$ ist, liegt nach **Satz 8.3** keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Bemerkung: Auch auf dem Intervall $(-1,1)$ liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\left|s_N(x) - f(x)\right| = \left|(1-x)x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - x\right| = \left|(1-x)x\frac{1-x^N}{1-x} - x\right| = |-x^{N+1}| = |x|^{N+1}$$

sowie

$$|x|^{N+1} \geqslant \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| \geqslant \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}.$$

Obige Rechnung zeigt: Ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gesetzt, dann finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $x \in (-1,1)$ (etwa $x = \frac{1}{\sqrt[N+1]{2}}$) so, dass $|s_N(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ gilt. Dies schließt gleichmäßige Konvergenz aus.

d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt nach **Satz 7.18 (2)**: Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ konvergiert gleichmäßig und damit auch punktweise auf $\mathbb{R}$.

e) Zunächst gilt $f_n(0) = 1 \to 1$, wenn $n \to \infty$. Weiter ist für $x > 0$

$$f_n(x) \;=\; \frac{\sin(x/n)}{x/n} \to 1$$

im Grenzfall $n \to \infty$. Dies folgt aus

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} \;=\; 1$$

(s. VL) mithilfe der Definition des Grenzwertes von Funktionen. Damit konvergiert $(f_n)_n$ auf $[0,\infty)$ punktweise gegen die Funktion, die konstant durch 1 gegeben ist. Zeichnen wir jedoch wieder für wachsendes $n \in \mathbb{N}$ die Graphen der Folgeglieder f_n, so beobachtet man, dass die Funktionen immer langsamer oszillieren und immer weniger gedämpft werden. Im Grenzfall $n \to \infty$ werden die "Bäuche" alle nach rechts "geschoben" und die Funktion garnicht mehr gedämpft. Die Amplitude des ersten Bauches bleibt jedoch konstant, wie man wie folgt einsieht: Wählt man $x_n = n\pi/2$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt stets

$$f_n(x_n) \;=\; \frac{2}{\pi}\sin(\pi/2) \;\leqslant\; \frac{2}{3} \;<\; 1$$

nach dem Hinweis von **Aufgabe 33 c)**. Insbesondere ist also

$$|f_n(x_n) - 1| \;=\; \left|\frac{2}{\pi} - 1\right| \;=\; 1 - \frac{2}{\pi} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 35 (Übung)

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig ist.

(ii) Begründen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen, in denen die Funktion f stetig ist.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x = 3. \end{cases}$

(ii) $f\colon [-7,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \min\{x^2+2x-15,\ x^3\} & \text{für } x \in [-7,-5] \cup [-1,3], \\ x+5 & \text{für } x \in (-5,-1). \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) (i) Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, noch auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) Setze $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen begründen, dass es ein solches $\delta > 0$ gibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left\{ \begin{array}{cl} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Nach der $\epsilon - \delta$-Charakterisierung der Stetigkeit bedeutet dies gerade die Stetigkeit von f in 0.

b) (i) Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach einem Beispiel der Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist). Fazit: f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig.

(ii) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \leqslant 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1,0)$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5) \leq 0$ und $x^3 \geq 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0,3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (punktweise nachrechnen, Betrag ist stetig nach Satz 8.1). Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5,-1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} x+5 = 4 \neq -16 = \lim_{x\to -1+} x^2 + 2x - 15 = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

ist f in -1 unstetig. Da x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, erhält man entsprechend, dass f nicht stetig in -5 ist.

Aufgabe 36 (Tutorium)

a) Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos(x)} \left(e^{5x} - e^x\right)$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - e^x}{x}$

Hinweis: Verwenden Sie in (iii) die Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für (v) zunächst $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))/x^2$.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Geben Sie die Stetigkeitsstellen der Funktion f an.

(i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in [0,1), \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{|x|} + \sqrt{\frac{1}{|x|}}} - \sqrt{\frac{1}{|x|} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}} & \text{für } x \neq 0, \\ a & \text{für } x = 0. \end{cases}$

c) Definiere

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } x > \sqrt{2} \\ 0 & \text{, falls } x < \sqrt{2} \end{cases}.$$

Ist f stetig?

Lösungsvorschlag

a) (i) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{8 + 2x^{-1} + x^{-3}}{2 + 7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4.$$

(ii) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit dem Hinweis die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x})^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x})^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0})^2 + 2\sqrt[3]{8+0} + 4} = \frac{1}{12}.$$

(iii) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$x^3 - 9x^2 + 16x - 4 = (x-2)(x^2 - 7x + 2)$$
$$3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = (x-2)(3x^2 - 4x + 1).$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 - 7x + 2)}{(x-2)(3x^2 - 4x + 1)} = \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 4x + 1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2 - 4x + 1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und gegeben ist durch

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 4x + 1} = -\frac{8}{5}.$$

(iv) Zunächst kennen wir aus der Vorlesung folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Dieser Grenzwerte wollen wir uns im Folgenden bedienen.Sei dazu $(x_n)_n$ eine beliebige Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1.$$

Dies bedeutet nach Definition der Folgenkonvergenz aber gerade, dass ein solches $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, dass für alle $n \geqslant n_0$

$$\left|\frac{\sin(x_n)}{x_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

gilt. Insbesondere gilt dann nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\sin(x_n)| &= |x_n|\left|\frac{\sin(x_n)}{x_n} - 1 + 1\right| \geqslant |x_n|\left|\left|\frac{\sin(x_n)}{x_n} - 1\right| - 1\right| \\ &\geqslant |x_n|\left(1 - \left|\frac{\sin(x_n)}{x_n} - 1\right|\right) \geqslant |x_n|/2 > 0 \end{aligned}$$

für alle $n \geqslant n_0$. Darüber hinaus gilt

$$\sin(x_n) = \frac{\sin(x_n)}{x_n} x_n \to 1 \cdot 0 = 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit gilt für die Folge $(y_n)_n$ mit $y_n := \sin(x_{n_0+n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y_n \to 0$, wenn $n \to \infty$. Wegen $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$ folgt nach Definition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}-1}{y_n} = 1.$$

Nach den Grenzwertsätzen für Folgen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}-1}{y_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_{n+n_0})}{x_{n+n_0}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\sin(x_{n+n_0})}-1}{\sin(x_{n+n_0})} \cdot \frac{\sin(x_{n+n_0})}{x_{n+n_0}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sin(x_{n+n_0})}-1}{x_{n+n_0}}.$$

Da für den Grenzwert endlich viele Folgeglieder irrelevant sind, existiert dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sin(x_n)}-1}{x_n} = 1.$$

Da $(x_n)_n$ eine beliebige Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt damit nach Definition

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x} = 1.$$

(v) Zunächst zeigen wir den Hinweis. Nach **Satz 8.4** sind Potenzreihen stetig auf dem Konvergenzintervall. Damit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2},$$

wobei wir verwenden, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}$ wiederum den Konvergenzradius ∞ besitzt. Darüber hinaus gilt mit analogem Argument zu dem der vorherigen Teilaufgabe und mithilfe der Grenzwertsätze

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^x}{x} = \lim_{x\to 0} 4e^x \frac{e^{4x}-1}{4x} = 4.$$

Der Leser überlege sich, wie man dieses Argument präzise ausführen könnte. Insgesamt erhalten wir mithilfe der Grenzwertsätze

$$8 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos(x)}\left(e^{5x}-e^x\right).$$

(vi) Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 1$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere gilt dann für $y_n := x_{n+n_0}^2 - x_{n+n_0}$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \text{und} \quad y_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$ und mithilfe der Grenzwertsätze gilt dann

$$-1 \;=\; \left(\lim_{n\to\infty}\frac{e^{y_n}-1}{y_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} e^{x_{n+n_0}}(x_{n+n_0}-1)\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_{n+n_0}^2}-e^{x_{n+n_0}}}{x_{n+n_0}}.$$

Da zur Berechnung des Grenzwertes wiederum endlich viele Folgenglieder irrelevant sind, erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{x_n^2}-e^{x_n}}{x_n}.$$

Da $(x_n)_n$ eine beliebige Nullfolge mit $x_n \neq 0$ war, gilt schließlich

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^x}{x} \;=\; 1.$$

b) (i) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x\in[0,1)$ stetig. Für alle $x\in[0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1}\cdot\left(1+\frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)} \end{aligned}$$

Folglich ist f für $a=\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ auf ganz $[0,1]$ stetig und für $a\neq -\frac{2}{3}$ nur auf $[0,1)$.

(ii) f ist als Komposition stetiger Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) für alle $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Sei $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ und definiere $y:=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{|x|}+\sqrt{\frac{1}{|x|}}}-\sqrt{\frac{1}{|x|}-\sqrt{\frac{1}{|x|}}} = \sqrt{y^2+y}-\sqrt{y^2-y} = \frac{y^2+y-(y^2-y)}{\sqrt{y^2+y}+\sqrt{y^2-y}} \\ &= \frac{2y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+\sqrt{1-\frac{1}{y}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)}. \end{aligned}$$

Folglich ist f für $a=\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{|x|}}+\sqrt{1-\sqrt{|x|}}\right)} = 1$ auf ganz $[-1,1]$ stetig und für $a\neq 1$ nur auf $[-1,1]\setminus\{0\}$.

c) Wir zeigen, dass f stetig ist. Seien dazu $q_0\in\mathbb{Q}$ und $(q_n)_n$ eine rationale Folge mit $\lim_{n\to\infty} q_n = q_0$.
Falls $q_0<\sqrt{2}$, definiere $\varepsilon := (\sqrt{2}-q_0)/2>0$. Dann gilt wegen der Konvergenz f.f.a. $n\in\mathbb{N}$

$$|q_n-q_0| \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Wir erhalten dann

$$\sqrt{2}-q_n \;\geqslant\; |\sqrt{2}-q_n| \;\geqslant\; \Big||\sqrt{2}-q_0|-|q_n-q_0|\Big| \;\geqslant\; |\sqrt{2}-q_0|-|q_n-q_0| \;\geqslant\; |\sqrt{2}-q_0|/2 \;>\; 0$$

f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, $q_n < \sqrt{2}$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, also gilt auch $f(q_n) = 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) \ = \ 0.$$

Da $(q_n)_n$ eine beliebige Folge war, folgt nach Definition, dass f in q_0 stetig ist. Mit analogem Argument lässt sich zeigen, dass f in $q_0 > \sqrt{2}$ stetig ist.