Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
30.11.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 38 (Tutorium)

a) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \geqslant 0$ besitzt.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2} + x_0\right).$$

Aufgabe 39 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler bzw. der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen (vgl. **Aufgabe 3 a)**) in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$$

abgeschlossen?

b) Zeigen Sie

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(n_k)_k$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_k \to \infty$, wenn $k \to \infty$ und existiert für eine (kompl.) Folge $\lim_{n\to\infty} a_n$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Sei $0 < a \neq 1$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ für $a > 1$ streng wachsend und für $a < 1$ streng fallend ist.

b) Zeigen Sie, dass $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ streng wachsend ist.

c) Bestimmen Sie, falls existent, Minimum und Maximum folgender Menge

$$\{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + x^2 + 17 \mid x \in [0,1]\}.$$

Aufgabe 41 (Übung)

a) Beweisen Sie: Gilt für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Aufgabe 42 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to 0} x\log(x)$, **b)** $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1}$, **c)** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

d) $\lim_{x\to\infty} x(\log(x+1) - \log(x))$, **e)** $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$, **f)** $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ für $a > 0$.

Knobelaufgabe

Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass auch $\mathbb{R} \setminus A$ abgeschlossen ist.