Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
11.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37 (Übung)

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \le 1, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt (siehe **a)**)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\ge 0}} \le |x| \le 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \le 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subseteq [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) In **b)** sahen wir bereits $f([-1,1]) = [-1,1]$, d.h.,

$$\tilde{f}\colon [-1,1] \to [-1,1],\ x \mapsto f(x)$$

ist surjektiv. Wir wollen jetzt noch sehen, dass f und somit $\tilde{f}$ injektiv ist. Dazu zeigen wir, dass f sogar streng wachsend ist.
Seien zunächst $-1 \leq x < y < 0$. Dann gilt $1-\sqrt{1-x^2} > 0$, d.h., $f(x) < 0 = f(0)$. Weiter gilt $y^2 < x^2$ (!) und wegen der Monotonie der Wurzel auch

$$\sqrt{1-y^2} > \sqrt{1-x^2}.$$

Wegen $x < y < 0$ gilt dann

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{y} > \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Also ist f auf $[-1,0]$ streng wachsend. Falls nun $x < 0 < y$ gilt wegen $f(x) < 0 < f(y)$ insbesondere $f(x) < f(y)$. Falls $0 < x < y \leq 1$, so gilt wegen $-1 \leq -y < -x < 0$ und mit obigem Fall

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{-y} < \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{-x}.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Somit ist f, also auch $\tilde{f}$, auf ganz $[-1,1]$ streng wachsend und damit insgesamt bijektiv.
Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\
&\overset{1-xy\geq 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Da f nach dem letzten Aufgabenteil streng wachsend ist, folgt aus **Satz 8.13**, dass f^{-1} streng wachsend ist. Alternativ kann man die Monotonie auch wieder direkt nachrechnen:
Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leq 1$ ist $x_1x_2 < 1$.
Beachte folgendes Resultat: Sei g umkehrbar mit Umkehrfunktion g^{-1}. Da g^{-1} die Umkehrfunk-

tion von g ist, ist g die Umkehrfunktion von g^{-1}. Mit **Satz 8.13** ist damit g genau dann streng wachsend/fallend, wenn g^{-1} es ist.

Aufgabe 38 (Tutorium)

a) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \geqslant 0$ besitzt.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ existiert mit der Eigenschaft:

$$f(x_0) = f\left(\frac{1}{2} + x_0\right).$$

Lösungsvorschlag

a) Sei $h := g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$, $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $0 = h(x_0) = g(x_0) - f(x_0)$.

b) Setze $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) := \sqrt{x}$. Beide Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil a) existiert also ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

c) Setze[1]

$$g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x + \frac{1}{2}) \quad \text{sowie} \quad \tilde{f} : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x).$$

Dann sind g und $\tilde{f}$ stetig und es gilt

$$g(0) = f(1/2) = \tilde{f}(1/2), \qquad g(1/2) = f(1) = f(0) = \tilde{f}(0).$$

Gilt $(f(0) =)\tilde{f}(0) = g(0)(= f(1/2))$, so ist die Behauptung gezeigt (mit $x_0 = 0$). Ansonsten ist entweder $(f(0) =)\tilde{f}(0) < g(0)$ und somit

$$\tilde{f}(1/2) = f(1/2) = g(0) > f(0) = g(1/2),$$

d.h., $\tilde{f}(1/2) > g(1/2)$, oder es gilt die umgekehrte Ungleichung. In beiden Fällen folgt die Behauptung aus **a)**.

Aufgabe 39 (Übung)

a) Zeigen Sie, dass die Vereinigung endlich vieler bzw. der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen (vgl. **Aufgabe 3 a)**) in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$$

abgeschlossen?

[1] $\tilde{f}$ heißt in diesem Zusammenhang *Einschränkung* von f auf $[0, \frac{1}{2}]$ und man schreibt auch $\tilde{f} =: f|_{[0,\frac{1}{2}]}$.

b) Zeigen Sie
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(n_k)_k$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_k \to \infty$, wenn $k \to \infty$ und existiert für eine (kompl.) Folge $\lim_{n\to\infty} a_n$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Lösungsvorschlag

a) Sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge. Wir wollen zeigen, dass dann $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_n$ eine konvergente Folge in $\bigcap_{i\in I} A_i$, d.h.,
$$\forall i \in I\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \in A_i$$
und es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Um die Abgeschlossenheit von $\bigcap_{i\in I} A_i$ zu zeigen, müssen wir zeigen, dass $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ gilt. Wegen der Abgeschlossenheit von A_i für $i \in I$ gilt nach obiger Voraussetzung an $(x_n)_n$
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A_i$$
für alle $i \in I$. Insbesondere liegt x dann im Schnitt über alle A_i, d.h., $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Damit ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen.
Seien nun $B_1, B_2, \ldots, B_m$ abgeschlossene Mengen ($m \in \mathbb{N}$). Wie sich leicht einsehen (nachrechnen!) lässt, gilt
$$\bigcup_{j=1}^m B_j = \bigcup_{j\in\{1;2;\ldots\ m\}} B_j.$$
Sei nun $(y_n)_n$ eine konvergente Folge in $\bigcup_{j=1}^m B_j$, d.h., für alle $n \in \mathbb{N}$ existiere ein $j \in \{1;2;\ldots;m\}$ mit
$$y_n \in B_j.$$
Da es nur endlich viele solche j gibt und unendlich viele y_n, muss es nach dem Schubfachprinzip (siehe Lösung zu **Aufgabe 3b)**) ein $j \in \{1;2;\ldots;m\}$ derart geben, dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in B_j$ gilt. Wir wählen also ein solches $j \in \{1;2;\ldots;m\}$ und eine Teilfolge $(y_{n_k})_k$ von $(y_n)_n$, dass
$$y_{n_k} \in B_j \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
gilt. Da $(y_n)_n$ konvergiert, konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen und auch gegen denselben Grenzwert, d.h., $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$. Da nun B_j abgeschlossen ist und $(y_{n_k})_k$ eine konvergente Folge in B_j ist, gilt
$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in B_j.$$
Also gilt auch
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in B_j \subseteq \bigcup_{l=1}^m B_l$$
und damit ist $\bigcup_{l=1}^m B_l$ abgeschlossen.
Nun zum zweiten Teil der Aufgabe. Es ist z.B.
$$1-\frac{1}{k} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$$
für alle $k \in \mathbb{N}$. $(1-\frac{1}{k})_k$ ist also eine konvergente Folge in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ mit Grenzwert $1 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$. Damit ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ nicht abgeschlossen.

Fazit: In dieser Aufgabe haben wir gelernt, dass beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Außerdem sind endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, doch bereits die abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist nicht unbedingt abgeschlossen.

b) Sei $(x_k)_k$ eine reelle Folge mit $x_k \to \infty$, wenn $k \to \infty$. Zunächst folgt aus der Vorlesung, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m > x$. Daher existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$

$$n_k \ := \ \min\{l \in \mathbb{N} \big| \ l > x_k\} - 1.$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$n_k \ \leqslant \ x_k \ \leqslant \ n_k + 1.$$

Wie wir in **Aufgabe 40 a)** sehen werden, ist $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ für $a > 1$ streng wachsend. Damit und wegen der Monotonie der Potenz (MP) gilt insbesondere

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \overset{\textbf{(MP)}}{\leqslant} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k} \overset{\textbf{(40a))}}{\leqslant} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \overset{\textbf{(40a)}}{\leqslant} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{n_k+1} \overset{\textbf{(MP)}}{\leqslant} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

An dieser Stelle würden wir gern zum Grenzfall $k \to \infty$ übergehen und ausnutzen, dass $n_k \to \infty$ gilt, falls $k \to \infty$. Dazu zeigen wir zunächst den Hinweis:
Sei $(a_n)_n$ eine konvergente (komplexe) Folge und $(n_k)_k$ wie oben gegeben. Wir wollen zeigen, dass dann auch $(a_{n_k})_k$ konvergiert und dass der Grenzwert dieser Folge gleich dem Grenzwert a der Folge $(a_n)_n$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert wegen der Konvergenz von $(a_n)_n$ ein solches $n_0 \in \mathbb{N}$, dass

$$|a_n - a| \ < \ \varepsilon$$

für alle $n \geqslant n_0$ gilt. Wegen $n_k \to \infty$, wenn $k \to \infty$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$n_k \ \geqslant \ n_0$$

für alle $k \geqslant k_0$ gilt. Insbesondere gilt dann für alle $k \geqslant k_0$

$$|a_{n_k} - a| \ < \ \varepsilon.$$

Das bedeutet gerade, dass $(a_{n_k})_k$ gegen a konvergiert.
Zurück zur Aufgabe: Wie leicht nachzurechnen ist, gelten

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \ = \ \mathrm{e} \ = \ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Mit dem gerade gezeigten Hinweis folgt somit die Behauptung. Der geneigte Leser wage sich, folgende Gleichheit nachzuweisen:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ = \ \mathrm{e}.$$

Aufgabe 40 (Tutorium)

a) Sei $0 < a \neq 1$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ für $a > 1$ streng wachsend und für $a < 1$ streng fallend ist.

b) Zeigen Sie, dass $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ streng wachsend ist.

c) Bestimmen Sie, falls existent, Minimum und Maximum folgender Menge

$$\{e^{2x} - 2xe^x + x^2 + 17 \mid x \in [0,1]\}.$$

Lösungsvorschlag

a) Seien $a > 1$ und $x < y$. Dann gilt

$$f(y) - f(x) \;=\; a^y - a^x \;=\; e^{y\log a} - e^{x \log a}.$$

Wegen $a > 1$ und des strengen Wachstums des Logarithmus (siehe **8.14**) gilt

$$\log a > \log 1 \;=\; 0.$$

Damit folgt zunächst $y \log a > x \log a$ und wegen der Monotonie der Exponentialfunktion (**Satz 7.13 (5)**) gilt

$$f(y) - f(x) \;=\; e^{y\log a} - e^{x\log a} \;>\; 0.$$

Das bedeutet gerade, dass f in diesem Fall streng wachsend ist.
Seien nun $0 < a < 1$ und $x < y$. Dann gilt nach dem gerade Gesehenen

$$f(y) - f(x) \;=\; a^y - a^x \;=\; (1/a)^{-y} - (1/a)^{-x} \;<\; 0,$$

da $1/a > 1$. Damit ist f in diesem Fall streng fallend.

b) Seien $0 \leqslant x < y$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt

$$g(y) - g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} - y - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + x \overset{(!)}{=} \sum_{k=2}^{\infty} y^k - x^k k! \;\geqslant\; \frac{y^2 - x^2}{2} \;>\; 0.$$

Das bedeutet gerade, dass g streng wachsend ist.

c) Definiere

$$M \;:=\; \{e^{2x} - 2xe^x + x^2 + 17 \mid x \in [0,1]\}$$

Sei $x \in [0,1]$. Dann gilt

$$e^{2x} - 2xe^x + x^2 + 17 \;=\; (e^x - x)^2 + 17.$$

Nun ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x - x$, nach **b)** streng wachsend und $f(0) = 1 > 0$. Das heißt, dass f stets positiv ist. Da $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$, streng wachsend ist, ist auch $g \circ f$ streng wachsend. Insbesondere nimmt $g \circ f$ bei 0 sein Minimum und bei 1 sein Maximum an. Damit erhalten wir

$$\min M \;=\; g(f(0)) + 17 \;=\; 18 \quad \text{sowie} \quad \max M \;=\; g(f(1)) + 17 = e(e-2) + 18.$$

Aufgabe 41 (Übung)

a) Beweisen Sie: Gilt für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wenn die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann ist die Funktion $1/f$ beschränkt.

Lösungsvorschlag

a) Ist f die Nullfunktion, so ist die Behauptung klar. Andernfalls existiert ein x_1 mit $\varepsilon := |f(x_1)| > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $R > 0$ mit

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \forall |x| > R.$$

Die stetige Funktion $|f|$ nimmt auf der kompakten Menge $[-R, R]$ ihr Maximum an, es existiert also ein $x_0 \in [-R, R]$ mit

$$|f(x_0)| = \max_{x \in [-R,R]} |f(x)|$$

Da $x_1 \in [-R, R]$ ist $|f(x_0)| \geqslant |f(x_1)| = \varepsilon$ und damit auch

$$|f(x_0)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

was zu beweisen war.

b) Die stetige Funktion f nimmt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum an, das nach Voraussetzung positiv ist, also existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Damit gilt für die Funktion $\frac{1}{f}$, dass für $x \in [a, b]$

$$0 < \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x_0)} = C < \infty,$$

womit $\frac{1}{f}$ beschränkt ist.

Aufgabe 42 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \to 0} x \log(x)$, **b)** $\lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x - 1}$, **c)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$,

d) $\lim_{x \to \infty} x(\log(x + 1) - \log(x))$, **e)** $\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{x}}$, **f)** $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ für $a > 0$.

Lösungsvorschlag

a) Sei $(x_n)_n$ eine Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $y_n := \frac{1}{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(y_n)_n$ gegen unendlich. Insbesondere ist $y_n \geqslant 1$ für alle $n \geqslant n_0$ für einen gewissen Index n_0. Dann gilt

$$|x_n \log(x_n)|| \;=\; |{}^1\!/_{y_n} \log({}^1\!/_{y_n})| \;=\; \frac{\log(y_n)}{y_n}.$$

Für $y > 0$ gilt

$$\frac{y}{2} \;\leqslant\; 1 + \sqrt{y} + \frac{y}{2} + \ldots \;=\; e^{\sqrt{y}}.$$

Wegen der Monotonie des Logarithmus gilt dann

$$|x_n \log(x_n)|| \leqslant \frac{\log(y_n)}{y_n} \leqslant \frac{\log(2e^{\sqrt{y_n}})}{y_n} = \frac{\log(2)}{y_n} + \frac{1}{\sqrt{y_n}} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Wir würden an dieser Stelle gern zum $lim_{n\to\infty}$ übergehen. Jedoch ist nicht klar, dass $(|x_n \log(x_n)|)_n$ überhaupt konvergiert. Technisch übergeht man diesen Missstand mithilfe des $\limsup_{n\to\infty}$ sowie des $\liminf_{n\to\infty}$ im zweiten Schritt. Es gilt nämlich

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} |x_n \log(x_n)| \leqslant \limsup_{n\to\infty} |x_n \log(x_n)| \leqslant 0$$

und damit $\lim_{n\to\infty} x_n \log(x_n) = 0$. Da $(x_n)_n$ eine beliebige Nullfolge (mit $x_n > 0$) ist, folgt

$$\lim_{x\to 0} x \log(x) = 0.$$

b) Da $x \to 1 \Leftrightarrow \log(x) \to 0$ (eine Richtung wegen Stetigkeit des Logarithmus, andere wegen Injektivität bzw. Stetigkeit der Umkehrfunktion), gilt (mit $y := \log(x)$, also $x = e^y$), dass

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1,$$

wobei der Grenzwert sich als Kehrwert des aus der Vorlesung bekannten Grenzwertes $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ergibt.

c) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D, so gilt (mit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^\alpha.$$

Dies lässt sich direkt anhand der Definition des Grenzwertes zeigen mit Hilfe der Tatsache, dass die Exponentialfunktion bijektiv und stetig ist. Nun beobachten wir, dass per Definition

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)}.$$

Betrachten wir nun den Exponenten der rechten Seite, sehen wir, dass

$$(x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = (x+1)\frac{2}{2x+1}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}} = \frac{2+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}\frac{\log\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\frac{2}{2x+1}}.$$

Der erste Bruch konvergiert für $x \to \infty$ gegen 1, der zweite ebenfalls nach **b)** ($x \to \infty \Rightarrow y := 1 + \frac{2}{2x+1} \to 1$ und im Nenner steht $y - 1$). Somit folgt insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)\log\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right) = 1,$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^1 = e.$$

d) Für $x > 0$ gilt

$$x(\log(x+1) - \log(x)) = \log\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Nach **Aufgabe 39 b)** gilt $\lim_{x\to\infty}(1+{}^1\!/x)^x \to \mathrm{e}$. Mit der Stetigkeit des Logarithmus folgt nun

$$\lim_{x\to\infty} x(\log(x+1) - \log(x)) = \log \mathrm{e} = 1.$$

e) Eine Möglichkeit bietet eine zu **Aufgabe 39 b)** analoge Rechnung. Wir wollen noch einen anderen Lösungsweg präsentieren. Es gilt

$$x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\log(x)/x}.$$

Wie sich leicht zeigen lässt gilt $\log(x)/x \to -\infty$, wenn $x \to 0$. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Die saubere Argumentation läuft an dieser Stelle wieder über die Definition des Funktionsgrenzwertes über Folgen. Sei also $(x_n)_n$ eine Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $y_n := {}^1\!/x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Dann gilt

$$x_n^{\frac{1}{x_n}} = \mathrm{e}^{\log(x_n)/x_n} = \mathrm{e}^{-y_n \log y_n} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$.

f) Für $a = 1$ gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

Sei nun $a \neq 1$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x} = \log(a)\frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. Da $x \to 0 \Leftrightarrow x\log(a) \to 0$ (da $\log(a)$ konstant und ungleich 0 ist), gilt dieser Grenzwert auch für obigen Bruch. Daher folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log(a)\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\log(a)} - 1}{x\log(a)} = \log(a).$$

Damit gilt für alle $a > 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log(a).$$