Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
07.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 43 (Übung)

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geqslant 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie folgende für $\mathbb{R}$ bekannte Regeln: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(z) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{Z}\pi = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

sowie

$$\cos(z) \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{Z}\pi + \pi/2 = \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 44 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Aufgabe 45 (Übung)

a) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x-y)(x+y)\,e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right)\right)$.

b) Zeigen Sie: Für $a, b \in [0, \pi/4]$ gilt

$$|\mathrm{e}^b \sin(b) - \mathrm{e}^a \sin(a)|| \ \leqslant \ \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4}|b-a|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$g : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$$

streng wachsend ist.

Aufgabe 46 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie für **(i)** die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, wenn $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1+\log(x))$ für $x > y > 0$,

(ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}\,|x-y|$ für $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

Aufgabe 47 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig oder differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie, wenn möglich, die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3$, (ii) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie, wenn möglich, die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

b) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty)$, $f(x) = \log(\log(x))$,

d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)}$,

e) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

f) $D = (0, \infty)$, $f(x) = x^x$,

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $f(x) = \log|x^2 - 1|$,

h) $D = (0, \pi)$, $f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

i) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh(x)$,

j) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin(x)|$.