Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
18.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 43 (Übung)

a) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y \geqslant 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & y < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen Sie folgende für $\mathbb{R}$ bekannte Regeln: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}\pi = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

sowie

$$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}\pi + \pi/2 = \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Lösungsvorschlag

a) Die Polardarstellung von z lautet

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)} = |z|\cos(\arg(z)) + \mathrm{i}\,|z|\sin(\arg(z)).$$

Insbesondere gilt also $x = |z|\cos(\arg(z))$, also $\frac{x}{|z|} = \cos(\arg(z))$. Das Argument kann nun jedoch zwischen $-\pi$ und π liegen, ganz im Gegensatz zum Arcuscosinus, der nur Werte in $[0,\pi]$ annimmt. Liegt das Argument ebenfalls in diesem Bereich (nämlich für $y \geqslant 0$), folgt hiermit

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Liegt das Argument jedoch in $(-\pi, 0)$ (also für $y < 0$), so gilt $-\arg(z) \in (0,\pi)$, weshalb hier

$$\begin{aligned}\arg(z) = -(-\arg(z)) = -\arccos(\cos(-\arg(z))) = -\arccos(\cos(\arg(z))) \\ = -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die Behauptung.

b) In beiden Teilen müssen wir zwei Implikationen zeigen. Dabei ist "$\Leftarrow$" nach Eigenschaft **(3)** von Sinus bzw. Cosinus klar. Es gilt nun auch die Implikation "$\Rightarrow$" zu zeigen.

Sei zunächst $\sin(z) = 0$ für ein $x + \mathrm{i}y = z \in \mathbb{C}$. Das heißt

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}((-\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y})\cos(x) + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y})\sin(x)) \\ &= \cosh(y)\sin(x) + \mathrm{i}\sinh(y)\cos(x). \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl ist genau dann 0, wen ihr Betrag 0 ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \cosh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos^2(x) \\ &= \cosh^2(y)\sin^2(x) - \sinh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\sin^2(x) + \sinh^2(y)\cos^2(x) \\ &= \sin^2(x) + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

Da beide Summanden nicht-negativ sind und die Summe verschwindet, folgt, dass beide Summanden bereits verschwinden müssen. Aus Eigenschaft **(2)** und **(6)** der Hyperbelfunktionen folgt, dass sinh genau in 0 eine Nullstelle hat. Außerdem besitzt der reelle Sinus wie oben bereits aufgeführt gerade in $\mathbb{Z}\pi$ Nullstellen. Damit gelten $y = 0$ und $x \in \mathbb{Z}\pi$, d.h., $z \in \mathbb{Z}\pi$.
Um die zweite Äquivalenz einzusehen, verwenden wir die auch im komplexen geltende Identität $\cos(z) = \sin(z + \pi/2)$, welche aus dem Additionstheorem für den Sinus folgt. Damit folgt mit dem eben Gezeigten

$$\cos(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(z + \pi/2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{Z}\pi + \pi/2.$$

Aufgabe 44 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201}.$$

b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^3 und z^{150} für $z = \cos(\frac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{4})$.

c) Geben Sie Betrag und Argument von $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in (0, 2\pi)$ an.

Lösungsvorschlag

a) Nach **Aufgabe 43 a)** gilt mit $z_\pm = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$, dass (wegen $|z_\pm| = 2$)

$$\arg z_\pm = \pm\arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Somit gilt

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = \left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{402\pi}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi}.$$

Da die Exponentialfunktion $2\pi\mathrm{i}$-periodisch ist, gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}134\pi} = 1$, also

$$\left(\frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{201} = 1.$$

b) Es gilt $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$, also (mit der $2\pi\mathrm{i}$-Periodizität der Exponentialfunktion)

$$z^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

sowie

$$z^{150} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{750\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}.$$

c) Es gilt

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}) = -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t-\pi}{2}},$$

wobei im letzten Schritt $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ benutzt wurde. Wegen $2\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ und $\frac{t-\pi}{2} \in (-\pi, \pi]$ für $t \in (0, 2\pi)$ ist dies bereits die Polardarstellung.

Aufgabe 45 (Übung)

a) Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $e^{x^2} - e^{y^2} \leq (x-y)(x+y)e^{x^2}$ für $x > y > 0$,

(ii) $\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right)\right)$.

b) Zeigen Sie: Für $a, b \in [0, \pi/4]$ gilt

$$|\mathrm{e}^b \sin(b) - \mathrm{e}^a \sin(a)|| \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{\pi/4}|b-a|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$g : [0, \pi/4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$$

streng wachsend ist.

Lösungsvorschlag

a) (i) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f : [y^2, x^2] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2, x^2]$ stetig und auf (y^2, x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2, x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2 - y^2)f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geq 0}e^{\xi} \leq (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

(ii) Sei $x \geq 1$. Dann ist log auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit:

$$\begin{aligned} x\left(\log\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\ &= \frac{x}{\xi_x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \quad \text{wegen} \quad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ nach **Satz 8.6 (4)**. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\Big(\log\Big(1+\sqrt{1+x^2}\Big)-\log(x)\Big) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Wegen der Komplementärwinkeleigenschaft **(2)** des Sinus und **Aufgabe 30 c)** gilt für $x \in [0,\pi/4]$

$$g(x) = e^x(\sin(x)+\cos(x)) = e^x(\sin(x)+\sin(x+\pi/2)) = 2e^x\sin(x+\pi/4)\cos(\pi/4).$$

Nun sind die Exponentialfunktion und der Sinus auf $[0,\pi/2]$ streng wachsend. Damit ist auch g streng wachsend (auf $[0,\pi/4]$).
Wir wenden uns jetzt der eigentlichen Aufgabe zu. Seien $a < b \in [0,\pi/4]$ Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_{a,b} \in (a,b)$ mit

$$e^b\sin(b) - e^a\sin(a) = g(\xi_{a,b})(b-a),$$

da g die Ableitung von $x \mapsto e^x\sin(x)$ ist. Da g wie oben gesehen auf $[0,\pi/4]$ streng wachsend ist, folgt

$$e^b\sin(b) - e^a\sin(a) \leqslant g(\pi/4)(b-a) = \sqrt{2}e^{\pi/4}(b-a).$$

Mit Vertauschen der Rollen von a und b erhalten wir das Behauptete.

Aufgabe 46 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim_{x\to\infty} x\cos(\arctan(x))$, (ii) $\lim_{x\to 0}(1+\arcsin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie für **(i)** die Identität $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$, wenn $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

(i) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1+\log(x))$ für $x > y > 0$,

(ii) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}\,|x-y|$ für $x,y \in [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Nach Vorlesung gilt $\sin(x), \cos(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Durch mehrmaliges Anwenden der Additionstheoreme folgt

$$\begin{aligned} 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

Also folgt $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ und wegen $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ ergibt sich $4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, somit $\frac{1}{2} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Aus einer beliebigen der obigen Gleichungen folgt dann auch $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, also $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Weiterhin folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

und deshalb $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) (i) Wir rechnen nach, dass für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}}} = |\cos(x)| = \cos(x).$$

Da $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ für $x \in \mathbb{R}$, folgt

$$x\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} \to 1 \quad (x \to \infty).$$

(ii) Nach Definition der allgemeinen Potenz gilt

$$(1 + \arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(1 + \arcsin(x))}$$

und

$$\frac{1}{x}\log(1 + \arcsin(x)) = \frac{\arcsin(x)}{x}\frac{\log(1 + \arcsin(x))}{\arcsin(x)}.$$

Der erste Bruch konvergiert gegen 1, denn mit $y = \arcsin(x)$ (x soll dabei bereits nahe genug an Null liegen, damit dieser Ausdruck definiert ist), also $x = \sin(y)$ (und somit $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$) gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin(y)} = 1,$$

wie bereits auf dem letzten Übungsblatt des Öfteren gesehen. Gleichzeitig folgt für den zweiten Bruch wie in **Aufgabe 42b)**, dass der Grenzwert 1 ist. Insgesamt gilt also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to 0}(1 + \arcsin(x))^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

c) (i) Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R}, t \mapsto t\log(t)$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\log(t) + t\cdot\frac{1}{t} = 1+\log(t)$, $t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\log(x) - y\log(y) = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\log(\xi)) \leq (x-y)(1+\log(x)),$$

weil $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

(ii) Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \log(\cos(t))$. Diese ist auf $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$. Da tan auf $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$|f'(t)| \leq \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{3}].$$

Sind $x,y \in [-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y).$$

Es folgt

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq \sqrt{3}\,|x-y|.$$

Aufgabe 47 (Übung)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, wo die Funktion f_α stetig oder differenzierbar ist und geben sie, falls existent, die Ableitung an.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie, wenn möglich, die Ableitung an.

(i) $f(x) = |x|^3$, (ii) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$.

Lösungsvorschlag

a) Wir stellen zunächst fest, dass f_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf der Menge $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig differenzierbar ist. Die Produkt- und Kettenregel liefert dort

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin(x^{-1}) + x^\alpha\cdot(-1)\cos(x^{-1})x^{-2} = x^{\alpha-2}(\alpha x\sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})),$$

was als Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist. Es bleibt also noch das Verhalten von f_α in Null zu bestimmen. Wir unterscheiden nach den Werten von α.
1. Fall: $\alpha \leqslant 0$. f_α ist hier unstetig in 0, denn für $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ gilt $\sin(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha(x_n) = \left(\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)^\alpha (-1)^n,$$

was nicht gegen 0 konvergiert, solange $\alpha \leqslant 0$ gilt.
2. Fall: $0 < \alpha \leqslant 1$. Nun ist die Funktion in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Für $x \neq 0$ gilt

nämlich

$$|f_\alpha(x) - f(0)| = |x|^\alpha |\sin(x^{-1})| \leqslant |x|^\alpha \to 0 \quad (x \to 0),$$

aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1})$$

existiert nicht mit der gleichen Folge als Argument wie im 1. Fall.

3. Fall: $1 < \alpha \leqslant 2$. Nun ist die Funktion in 0 differenzierbar. Der Vollständigkeit halber untersuchen wir auch die Ableitung von f auf Stetigkeit. Es gilt

$$f_\alpha'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} \sin(x^{-1}) = 0$$

wie beim Beweis der Stetigkeit im 2. Fall. Mit der Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ sehen wir jedoch, dass $\sin(x_n^{-1}) = 0$ und $\cos(x_n^{-1}) = (-1)^n$ und somit

$$f_\alpha'(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\alpha-2} (-1)^n,$$

was wiederum nicht (und damit insbesondere nicht gegen Null) konvergiert. Damit ist f_α' nicht stetig in 0.

4. Fall: $\alpha > 2$. Hier ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, da f_α' stetig in der Null ist. Mit derselben Rechnung wie im 3. Fall ist f_α in Null differenzierbar mit $f_\alpha'(0) = 0$ und für $x \neq 0$ mit $|x| \leqslant 1$ gilt

$$|f_\alpha'(x) - f_\alpha'(0)| \leqslant |x|^{\alpha-2}(\alpha\,|x|\,|\sin(x^{-1})| + |\cos(x^{-1})|) \leqslant |x|^{\alpha-2}(\alpha+1) \to 0 \quad (x \to 0),$$

womit f_α' in 0 stetig ist.

b) (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Beispiel (4) nach Satz 10.4 ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Wegen

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0+} x^2 = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0-} -x^2 = 0$$

gilt $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, d.h. f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Somit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(ii) Als Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion mit fast überall nicht verschwindender Ableitung (bis auf 0) ist Arsinh nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion differenzierbar. Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

wobei wir $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ sowie $\cosh(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verwendetet haben.

Aufgabe 48 (Tutorium)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und geben Sie wenn möglich die Ableitung an.

a) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

b) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

c) $D = (1, \infty)$, $\quad f(x) = \log(\log(x))$,

d) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \cos(2x)e^{\sin(x)}$,

e) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

f) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = x^x$,

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\quad f(x) = \log|x^2 - 1|$,

h) $D = (0, \pi)$, $\quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

i) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tanh(x)$,

j) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |\sin(x)|$.

Lösungsvorschlag

Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil **j)** sind als Koposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$ (siehe Beispiel **(2)** zu Beginn von §10 und **Satz 10.2**)

b) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

c) Nach der Vorlesung ist log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \qquad \forall x > 1.$$

d) Mit der Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$. Sei ferner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2(\sin \circ g)$. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2\sin(2x)e^{\sin(x)} + \cos(2x)\cos(x)e^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x))\, e^{\sin(x)}. \end{aligned}$$

e) Aus der Vorlesung ist bekannt (Beispiel **(7)** vor **Satz 10.1**), dass cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Ebenfalls laut Vorlesung (Beispiel **(2)** nach **Satz 10.4**) ist die Abbildung $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) \quad = \quad (g \circ \cosh)'(x) = (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \sinh(x) = -\frac{\sinh(x)}{2(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}$$

f) Es gilt $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$. Sei $g(x) := x\log(x)$. Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes $x > 0$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x) = x^x(1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x.$$

g) Für $|x| > 1$ ist $f(x) = \log(x^2 - 1)$ und damit ist f nach der Kettenregel in $|x| > 1$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Für $|x| < 1$ ist $f(x) = \log(1 - x^2)$ und damit ist f wiederum nach der Kettenregel in $|x| < 1$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Insgesamt ist also f auf ganz D differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

h) Sei $g : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{\sin(x)} = \mathrm{e}^{\log(x)\sin(x)}$ und $h : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sin(x)^x = \mathrm{e}^{\log(\sin(x))x}$. Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))'(x) = (\exp'\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log\cdot\sin)'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log'\cdot\sin+\log\cdot\sin')(x) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))'(x) = (\exp'\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id})'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log\circ\sin)'\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin)\cdot\mathrm{id}')(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log'\circ\sin\cdot\sin')\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin))(x) \\ &= \sin(x)^x\left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right). \end{aligned}$$

Dabei sei $\mathrm{id}(x) := x$ die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}$. Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g\cdot h]'(x) = g'(x)h(x)+g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)}\sin(x)^x\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)+\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right) \end{aligned}$$

i) Es gilt $f(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Mit $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ folgt anhand der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)},$$

wobei wir zusätzlich $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

j) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben.

Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade} \\ -\cos x & \text{falls } x \in (k\pi, (k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

In den Punkten $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0+} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0-} \frac{-\sin x - (-\sin x_0)}{x - x_0} = (-\sin)'(x_0) = -\cos(x_0) = -1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k \in \mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten gegen -1 und 1 konvergieren, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.