Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
14.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

Beweisen Sie die *Leibnizregel:* Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in I$ unendlich oft differenzierbare Funktionen, d.h., f und g sowie alle deren Ableitungen sind beide differenzierbar in x_0. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Aufgabe 50 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x - \pi}$, **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$, **c)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \tan(x)$.

Aufgabe 51 (Übung)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) e^x$ gegeben. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.
Hinweis: Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} | \, z \leqslant x\}$ für $x \in \mathbb{R}$ die untere Gaußklammer. Zeigen Sie folgende Identität:

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{k} a_l := \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} a_{2l} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k} a_l \left(1 + (-1)^l\right).$$

Aufgabe 52 (Tutorium)

Die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 1/2)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \leq C \, |x - 1/2|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Aufgabe 53 (Übung)

Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + x f(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

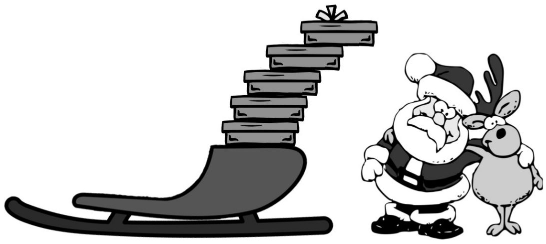
indem Sie annehmen, dass f sich auf einer δ-Umgebung $U_\delta(0) \subseteq I$ durch seine Taylorreihe darstellen lässt. Gibt es weitere Funktionen mit obigen Eigenschaften?

Aufgabe 54 (Tutorium)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Der Weihnachtsmann braucht Ihre Hilfe!

Der Weihnachtsmann hat fünf Geschenkpakete auf seinen Schlitten gestapelt. Nach rasanter Fahrt haben sich die Pakete wie im nebenstehenden Bild nach hinten verschoben und sind beinahe vom Schlitten gekippt. Es scheint, als ob sich das oberste Geschenk sogar nicht einmal mehr über der Ladefläche befindet. Der Weihnachtsmann fragt sich, ob das tatsächlich zutreffen kann. Außerdem grübelt er, wie weit er wohl „nach hinten bauen“ könnte, wenn er beliebig viele Geschenke zur Verfügung hätte. Können Sie dem Weihnachtsmann weiterhelfen?



Hinweis: Wir nehmen natürlich an, dass alle Pakete gleichartige, homogene, gleich ausgerichtete Quader sind und sich nur in Längsrichtung verschieben. Überlegen Sie sich, wie weit das oberste Paket über das zweitoberste hinausragen darf, wie weit die beiden obersten Pakete über das drittoberste hinausragen dürfen, und so weiter. Zeigen Sie anschließend induktiv, wie weit man mit einer festen, aber beliebigen Anzahl an Paketen maximal kommt.