Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
08.01.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49 (Übung)

Beweisen Sie die *Leibnizregel:* Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in I$ unendlich oft differenzierbare Funktionen, d.h., f und g sowie alle deren Ableitungen sind beide differenzierbar in x_0. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Lösungsvorschlag

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussagen gerade die gewöhnliche Produktregel. Es ist nämlich

$$(f \cdot g)^{(1)}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(1-k)}(x_0)$$

Induktionsschritt: Es gelte $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$ (Induktionsbehauptung). Dann gilt nach **Aufgabe 9a)** $(n \to n+1)$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)}(x_0) &= [(f \cdot g)^{(n)}]'(x_0) \overset{\textbf{IB}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)'(x_0) \\
&\overset{\textbf{IA}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0)] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) \\
&\overset{Indexshift}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) \\
&\overset{\textbf{9 a)(iii)}}{=} f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0) \\
&\overset{\textbf{9 a)(i)}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n+1-k)}(x_0).
\end{aligned}$$

Die letzten 3 Schritte sind genau analog zu **Aufgabe 9b)**.

Aufgabe 50 (Tutorium)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1-x+\log(x)}$, **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Lösungsvorschlag

a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\pi} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = \cos(\sin(x))\cos(x)$ und $f_2'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1} = -1$$

b) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen $(x^x)' = x^x(1+\ln x)$ (siehe **Aufgabe 48 f)**) ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x)) - 1}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x))^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2.$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)}{-\sin(x)} = -1.$$

Aufgabe 51 (Übung)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^x$ gegeben. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um 0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leqslant x\}$ für $x \in \mathbb{R}$ die untere Gaußklammer. Zeigen Sie folgende Identität:

$$\sum_{\substack{l=0\\ l \text{ gerade}}}^{k} a_l := \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} a_{2l} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k} a_l\left(1+(-1)^l\right).$$

Lösungsvorschlag

Definiere $g(x) := \cos(x)$ und $h(x) := e^x$. Es gelten für $k \in \mathbb{N}_0$

$$g^{(k)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 4l, \\ -1, & \text{falls } k = 4l+2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h^{(k)}(0) = 1.$$

Nach der Leibnizregel, **Aufgabe 49**, gilt also

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(0) h^{(n-k)}(0) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k.$$

Nun sehen wir, wo der Hinweis einfließt. Es sei dem Leser als leichte Übung zur Induktion überlassen, den Hinweis zu zeigen. Um mit der Gaußklammer zurechtzukommen, unterscheide man in k gerade und ungerade. Es gilt dann weiter

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \left(1 + (-1)^k\right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k 1^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathrm{i})^k 1^{n-k} \right] \\ &= \frac{1}{2} [(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n], \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den binomischen Lehrsatz verwendet haben. Mithilfe der Polardarstellung $1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2} e^{\pm \mathrm{i}\pi/4}$ erhalten wir weiter

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} [(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n] = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2} \left(e^{\mathrm{i}n\pi/4} + e^{-\mathrm{i}n\pi/4} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4} \right).$$

Wir zeigen nun, dass für $x \in \mathbb{R}$ das Restglied $R_n(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! x^{n+1}$, ξ zwischen 0 und x, im Grenzfall $n \to \infty$ verschwindet. Es gilt mithilfe der Dreiecksungleichung und mit $|g^{(k)}(\xi)| \leqslant 1$ sowie $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$$|R_n(\xi)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |g^{(k)}(\xi)| \cdot |h^{(n-k)}(\xi)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{2^n e^{\xi} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit konvergiert die Taylorreihe von f um 0 (punktweise!) gegen f und es gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n!} x^n.$$

Offensichtlich hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞.

Aufgabe 52 (Tutorium)

Die Funktion $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1,\infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, 1/2)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \leq C\,|x - 1/2|^3$$

für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Lösungsvorschlag

Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1,\infty)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x} \\ f^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\ f^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2(f, 1/2)$ ist nach der Definition vor **Satz 10.11** durch

$$\begin{aligned} T_2(f, 1/2)(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1,\infty)$ gegeben.
Sei nun $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ derart, dass

$$f(x) - T_2(f, 1/2)(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

gilt. Wegen $0 < \xi$ und damit

$$|f^{(3)}(\xi)| = |-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7$$

folgt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$|f(x) - T_2(f, 1/2)(x)| \leq C\,|x - \frac{1}{2}|^3$$

für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 53 (Übung)

Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

indem Sie annehmen, dass f sich auf einer δ-Umgebung $U_\delta(0) \subseteq I$ durch seine Taylorreihe darstellen lässt. Gibt es weitere Funktionen mit obigen Eigenschaften?

Lösungsvorschlag

Sei $(-\delta, \delta)$ eine Umgebung von 0, in der die Taylorreihe von f um 0 konvergiert. Es gelte also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \text{für } x \in (-\delta, \delta).$$

und $(-\delta, \delta) \subseteq I$. Wir bestimmen zunächst die ersten beiden Ableitungen von f in 0. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= -0 \cdot f(0) = 0 \\ f^{(2)}(0) &= (f^{(1)})'(0) = -(\mathrm{Id} \cdot f)'(0) = -f'(0) = -1 \end{aligned}$$

Um allgemein die n-te Ableitung auszurechnen, verwenden wir wieder die Leibnizregel (**Aufgabe 49**) sowie die Voraussetzung an f. Es gilt nämlich

$$f^{(n)}(0) = (f')^{(n-1)} = -(\mathrm{Id} \cdot f)^{(n-1)}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathrm{Id}^{(k)}(0) f^{(n-1-k)}(0).$$

In dieser Summe bleiben lediglich die Terme stehen, in der die Identität ($\mathrm{Id}(x) = x$) genau einmal abgeleitet wird. Damit gilt

$$f^{(n)}(0) = -(n-1) f^{(n-2)}(0).$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt direkt (mithilfe von Induktion), dass alle ungeraden Ableitungen verschwinden, da $f'(0) = 0$ wie oben gesehen. Für $n = 2k$ lässt sich durch Induktion leicht

$$f^{(2k)}(0) = \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}(-1)^k$$

zeigen. Damit gilt

$$\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!}$$

und schließlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!} x^{2k} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

für alle $|x| < \delta$. Offensichtlich hat die Potenzreihe Konvergenzradius ∞, also gilt $I = \mathbb{R}$. Angenommen, es gäbe eine weitere Funktion g mit denselben Eigenschaften wie f. Dann gälte für $h := g/f$

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{(g'(x) - xg(x))e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Dann folgt aus **Folgerung 10.7 (1)** mit der Voraussetzung

$$h(x) = c = h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1,$$

d.h. $g = f$ auf $(-\delta, \delta)$. Damit ist f die einzige (differenzierbare) Funktion mit den geforderten Eigenschaften.

Beachte: Streng genommen ist jede Einschränkung von f, die auf dem Intervall $(-\delta, \delta)$ definiert ist, eine weitere Funktion mit den geforderten Eigenschaften. Fordert man jedoch maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion, so ist f doch eindeutig durch obige Eigenschaften charakterisiert.

Aufgabe 54 (Tutorium)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

Lösungsvorschlag

Zunächst stellen wir fest, dass die f sich wie folgt in Linearfaktoren zerlegen lässt:

$$f(x) = (x-1)(x+3).$$

Als nächstes verwenden wir sogenannte Partialbruchzerlegung, um den Bruch $1/f$ aufzuspalten. Wir zerlegen

$$\frac{1}{x^2+2x-3} \overset{(!)}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x+3A-B}{(x-1)(x-3)}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten A und B. Koeffizientenvergleich liefert $A = 1/4 = -B$ und damit

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3}.$$

Wir wollen nun beide Terme durch eine geometrische Reihe darstellen. Um eine Potenzreihenentwicklung um -1 zu erhalten, müssen wir die Nenner jeweils entsprechend umformen. Eine leichte Rechnung ergibt

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{1-(-\frac{x+1}{2})}\right).$$

Für $|x| < 1$ gilt folglich

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2^k}(x+1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k-2}(x+1)^{2k}.$$