Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
21.12.2015

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

Finden Sie eine alternative Lösung zu **Aufgabe 51**: Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

indem Sie annehmen, dass f sich auf I durch eine *Potenzreihe* darstellen lässt.

Aufgabe 56 (Tutorium)

Finden Sie eine alternative Lösung von **Aufgabe 26** (in $\mathbb{R}$) mit Hilfe der Differentiation von Potenzreihen: Bestimmen Sie für $x \in (-1, 1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

Aufgabe 57 (Übung)

Bestimmen Sie eine reelle Potenzreihenentwicklung von Arsinh um den Entwicklungspunkt 0 und gehen Sie dabei analog zu Anwendung **(2)** nach **Satz 10.13** vor (Potenzreihenentwicklung von arctan).

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Potenzreihenentwicklung von $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ um 0 (zum Beispiel über die Taylorreihenentwicklung).

Aufgabe 58 (Tutorium)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

anhand der Definition (vgl. Beispiel **(3)** nach **Lemma 11.1**).

Aufgabe 59 (Übung)

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a, b]$ mit $g \geqslant 0$ oder $g \leqslant 0$ derart, dass auch $fg \in R[a, b]$ ist. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f \in R[a, b]$, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz berechnen Sie im Falle der Existenz den Grenzwert.

$$\text{(i)} \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\sqrt{\pi/4}-h}^{\sqrt{\pi/4}+h} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x, \text{(ii)} \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \int_{h}^{2h} \log(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(iii)} \lim_{h\to 0+} \int_0^1 h^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 60 (Tutorium)

a) Seien $a > 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{(i)} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} x^2 \mathrm{e}^{\cos^2(x)} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x,$$

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 30b)** für **(ii)**.

Wir wünschen erholsame Weihnachtsfeiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2015!

Quelle: http://static.nichtlustig.de/toondb/091223.html
Urheber: Joscha Sauer

Modulprüfung

- Die **Modulprüfung** findet am **07.03.2015** von **8 bis 10 Uhr** statt.
- Die **Anmeldung zur Prüfung** ist ab sofort online unter `https://campus.studium.kit.edu/exams/index.php` möglich
- **Anmeldeschluss** ist der **13.02.2015**.
- Eine Abmeldung von der Prüfung ist bis zum 06.03.2015 (ebenfalls online) möglich.
- Die **Hörsaalverteilung** wird bis Montag, den **22.02.2015**, auf der Webseite der Vorlesung.
- Als Hilfsmittel zugelassen sind zwei beidseitig handbeschriebene DIN-A4-Blätter