Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
15.01.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55 (Übung)

Finden Sie eine alternative Lösung zu **Aufgabe 51**: Finden Sie ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1,$$

indem Sie annehmen, dass f sich auf I durch eine *Potenzreihe* darstellen lässt.

Lösungsvorschlag

Wir nehmen an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für } x \in I = (-R, R),$$

wobei $I = \mathbb{R}$ für $R = \infty$. Nun wissen wir bereits, dass $1 = f(0) = a_0$ gelten muss. Außerdem gilt nach **Satz 10.12**

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Soll f nun die gegebene Gleichung erfüllen, so muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) + xf(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

für jedes $x \in I$. Nach **Satz 10.14** liefert das per Koeffizientenvergleich

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{n+1} \quad \text{für } n \geqslant 1.$$

Für ungerade $n = 2k+1$ folgt somit $a_{2k+1} = 0$, für gerade $n = 2k$ folgt

$$a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2k} = \frac{a_{2(k-2)}}{2^2 k(k-1)} = \cdots = (-1)^k \frac{a_0}{2^k k!} = \frac{(-1)^k}{2^k k!}.$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{2^k k!} = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}},$$

womit $I = \mathbb{R}$ ebenfalls klar ist.

Aufgabe 56 (Tutorium)

Finden Sie eine alternative Lösung von **Aufgabe 26** (in $\mathbb{R}$) mit Hilfe der Differentiation von Potenzreihen: Bestimmen Sie für $x \in (-1,1)$ den Wert der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

Lösungsvorschlag

Für $x \in (-1,1)$ gilt bekanntlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} =: f(x).$$

Nach **Satz 10.12** gilt nun (durch Differenzierung beider Seiten)

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3x}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{2-3x(1-x)-2(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

Aufgabe 57 (Übung)

Bestimmen Sie eine reelle Potenzreihenentwicklung von Arsinh um den Entwicklungspunkt 0 und gehen Sie dabei analog zu Anwendung **(2)** nach **Satz 10.13** vor (Potenzreihenentwicklung von arctan).

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Potenzreihenentwicklung von $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ um 0 (zum Beispiel über die Taylorreihenentwicklung).

Lösungsvorschlag

Zunächst gilt, wie in **Aufgabe 47b) (ii)** bestimmt $\operatorname{Arsinh}'(x) = (1+x^2)^{-1/2}$. Hier sehen wir, wo der Hinweis einfließt. Definiere $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ wie im Hinweis. Wir wollen nun die Taylorreihenentwicklung von f bestimmen. Es gelten

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht einsehen (z.B. durch Induktion), dass

$$f^{(n)}(0) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

gilt. Um einen Induktionsbeweis anwenden zu können, berechne man $f^{(n)}(x)$ für $x \in (-1,1)$ und zeige dann die Gültigkeit für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion. Es ist wegen der Monotonie von $f^{(n+1)}$ für $x \in (-1/4, 1/4)$ und ξ zwischen 0 und x

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{\max\{1;(1+x)^{-(2n+3)/2}\}|x|^{n+1}}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Via Induktion lässt sich dann

$$\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \leqslant 1$$

zeigen. Darüber hinaus gilt

$$\frac{|x|^{n+1}}{(1+x)^{(2n+3)/2}} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{(2n+3)/2}} = \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} (1-|x|)^{-1/2} \leqslant 3^{-n-1}(3/4)^{-1/2} \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Mit

$$\max\{1;(1+x)^{-(2n+3)/2}\} \leqslant 1 + (1+x)^{-(2n+3)/2}$$

folgt dann

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \to 0,$$

wenn $n \to \infty$. Damit gilt für $x \in (-1/4, 1/4)$ nach dem **Satz von Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} x^n.$$

Definiere

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für alle $x \in (-1,1)$. Der Leser berechne hier zur Übung den Konvergenzradius von g. Es gilt nach **Satz 10.12**

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} x^{2n} = f(x^2) = \operatorname{Arsinh}'(x)$$

für alle $x \in (-1/4, 1/4)$ Dann folgt mit **Aufgabe 10.7 (2)**

$$\operatorname{Arsinh}(x) = g(x) + c$$

für alle $x \in (-1/4, 1/4)$. Wegen $\operatorname{Arsinh}(0) = 0 = g(0)$ gilt $c = 0$ und damit

$$\operatorname{Arsinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für alle $x \in (-1/4, 1/4)$. Wir wollen nun begründen, warum diese Gleichheit dann schon für alle $x \in (-1,1)$ gilt. Sei dazu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Potenzreihenentwicklung von Arsinh mit Konvergenzradius

$R(\geqslant 1/4)$. Dann gilt

$$0 \;=\; \operatorname{Arsinh}(x) - \operatorname{Arsinh}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) x^k,$$

für alle $x \in (-1/4, 1/4)$, wobei wir

$$b_k \;:=\; \begin{cases} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1}, & \text{falls } k = 2n+1 \\ 0, & \text{falls } k = 2n \end{cases}$$

gesetzt haben. Damit folgt mit dem Identitätssatz für Potenzreihen (**10.14**) $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist dann

$$\operatorname{Arsinh}(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für alle $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 58 (Tutorium)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

anhand der Definition (vgl. Beispiel **(3)** nach **Lemma 11.1**).

Lösungsvorschlag

Als monoton wachsende Funktion ist exp auf $[0,1]$ (Riemann-)integrierbar nach **Satz 11.4**. Als Zerlegung wählen wir

$$Z_n = \left\{ \frac{j}{n} \,\Big|\, j \in \{0;\ldots;n\} \right\}.$$

Wegen der Monotonie gilt (mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung) $|I_j| = \frac{1}{n}$, $m_j = \mathrm{e}^{\frac{j-1}{n}}$, $M_j = \mathrm{e}^{\frac{j}{n}}$ und somit

$$s_{\exp}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^{j-1} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^{j} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n - n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \frac{\mathrm{e} - 1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n}$$

sowie

$$S_{\exp}(Z_n) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}})^{j} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{e} - 1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n}$$

Per definitionem des unteren/oberen Integrals gilt nun

$$\frac{\mathrm{e} - 1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n} = s_{\exp}(Z_n) \leqslant s_{\exp} \leqslant S_{\exp} \leqslant S_{\exp}(Z_n) = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{e} - 1}{n\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n}.$$

Da $\mathrm{e}^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt, folgt mit **Aufgabe 29b)** $s_{\exp} = S_{\exp} = \mathrm{e} - 1$, weswegen per definitionem

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

folgt.

Aufgabe 59 (Übung)

a) Beweisen Sie den erweiterten Mittelwertsatz: Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R[a,b]$ mit $g \geqslant 0$ oder $g \leqslant 0$ derart, dass auch $fg \in R[a,b]$ ist. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f \in R[a,b]$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Ausdrücke auf Konvergenz berechnen Sie im Falle der Existenz den Grenzwert.

(i) $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/4}-h}^{\sqrt{\pi/4}+h} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$, (ii) $\lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_h^{2h} \log(x)\,\mathrm{d}x$, (iii) $\lim\limits_{h\to 0+} \displaystyle\int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag

a) Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, nimmt es sein Maximum M und sein Minimum m an. Nach **Satz 11.2 (1)** gilt also (unter der Annahme $g \geqslant 0$, der andere Fall funktioniert analog)

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert ein $K \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = K\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zu diesem K existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $K = f(\xi)$, womit die erste Behauptung folgt. Setzt man $g \equiv 1$, so folgt die zweite Behauptung mit $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$.

b) (i) Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x^2)$ als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig und f in einer Umgebung von $\sqrt{\pi/4}$ (streng) fallend und damit nach **Satz 11.4** (Riemann-)integrierbar ist, gibt es zu jedem $0 < h < \sqrt{\pi/4}$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [\sqrt{\pi/4}-h, \sqrt{\pi/4}+h]$ mit

$$\int_{\sqrt{\pi/4}-h}^{\sqrt{\pi/4}+h} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \Big((\sqrt{\pi/4}+h)-(\sqrt{\pi/4}-h)\Big)\cos(\xi_h^2) = 2h\cos(\xi_h^2).$$

Also ist $\frac{1}{h}\int_{\sqrt{\pi/4}-h}^{\sqrt{\pi/4}+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = 2\cos(\xi_h^2)$ für jedes $h > 0$. Für $h \to 0+$ konvergiert ξ_h gegen $\sqrt{\pi/4}$ und wegen der Stetigkeit von f konvergiert damit auch $\cos(\xi_h^2)$ gegen $\cos(\sqrt{\pi/4}^2) =$

$\sqrt{2}/2$. Zusammen folgt

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_{\sqrt{\pi/4}-h}^{\sqrt{\pi/4}+h} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = 2\cos(\sqrt{\pi/4}^2) = \sqrt{2}.$$

(ii) Für jedes $h > 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein $\xi_h \in [h, 2h]$ mit

$$\int_h^{2h} \log(x)\,\mathrm{d}x = ((2h) - (h))\log(\xi_h) = h\log(\xi_h).$$

Demzufolge ist $\frac{1}{h}\int_h^{2h} \log(x)\,\mathrm{d}x = \log(\xi_h)$. Mit $h \to \infty$ geht ξ_h gegen ∞ und damit strebt auch $\log(\xi_h)$ gegen ∞. Also konvergiert der Ausdruck $\frac{1}{h}\int_h^{2h} \log(x)\,\mathrm{d}x$ für $h \to \infty$ nicht.

(iii) Zunächst stellen wir fest, dass sowohl $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto h^x\cos(x)$ als auch $|f| = f$ für $0 < h < 1$ als komposition (streng) fallender Funktionen monoton und daher nach **Satz 11.4** (Riemann-)integrierbar ist. Wir zeigen, dass der Grenzwert 0 ist. Sei dazu $0 < \varepsilon < 2$. Wir zerlegen das Intervall $[0,1]$ in zwei Teilintervalle so, dass der Betrag des Integrals über ein Teilintervall durch $\varepsilon/2$ abgeschätzt werden kann. Das erste Intervall soll die Länge $\varepsilon/2$ haben. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\xi \in [0, \varepsilon/2]$ mit

$$\left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| |h^\xi|\,|\cos(\xi)| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für jedes } h \in (0,1).$$

Sei nun $h > 0$ so klein, dass $h^{\varepsilon/2} < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für ein $\xi \in [\varepsilon/2, 1]$ (insbesondere also $\xi \ge \varepsilon/2$)

$$\left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| \le \underbrace{(1-\varepsilon/2)}_{\le 1}|h^\xi||\cos(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt finden wir also folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 h^x\cos(x)\ \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{h\to 0+} \int_0^1 h^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 60 (Tutorium)

a) Seien $a > 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Beweisen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} x^2 e^{\cos^2(x)} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x,$ (ii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x,$

Hinweis: Verwenden Sie **Aufgabe 30b)** für **(ii)**.

Lösungsvorschlag

a) Wir wählen die Äquidistanzpartition

$$Z_n := \left\{ a\left(-1+\frac{j}{n}\right) \,\middle|\, j \in \{0;1;\dots;2n\}\right\}$$

auf $[-a,a]$ und definieren

$$I_j := \left[a\left(-1+\frac{j-1}{n}\right), a\left(-1+\frac{j}{n}\right)\right]$$

sowie $m_j := \inf f(I_j)$ und $M_j := \sup f(I_j)$ für $j \in \{1;2;\dots;2n\}$. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gelten $m_j = m_{2n+1-j}$ und $M_j = M_{2n+1-j}$, falls f gerade, und $m_j = -M_{2n+1-j}$ und $M_j = -m_{2n+1-j}$, falls f ungerade. Damit gilt

$$s_f(Z_n) = \sum_{j=1}^{2n} |I_j| m_j = \frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j + \frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} m_{2n+1-j} = \begin{cases} \frac{2a}{n}\sum_{j=1}^n m_{n+j} & \text{, falls } f \text{ gerade,} \\ \frac{a}{n}\sum_{j=1}^n (m_{n+j}-M_{n+j}) & \text{, falls } f \text{ ungerade} \end{cases},$$

wobei die letzte Gleichheit durch Umordnen der Summanden folgt. Nun ist $f \in R[-a,a]$ und nach **Satz 11.6** also auch $f \in R[0,a]$. Außerdem ist $\frac{a}{n}\sum_{j=1}^n m_{n+j}$ bzw. $\frac{a}{n}\sum_{j=1}^n M_{n+j}$ eine Unter- bzw. Obersumme von f bzgl. der Äquidistanzpartition auf $[0,a]$, welche nach **Satz 11.5** wegen $f \in R[0,a]$ gegen $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Daher gilt

$$s_f(Z_n) = \begin{cases} \frac{2a}{n}\sum_{j=1}^n m_{n+j} & \text{, falls } f \text{ gerade,} \\ \frac{a}{n}\sum_{j=1}^n (m_{n+j}-M_{n+j}) & \text{, falls } f \text{ ungerade} \end{cases} \to \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{, falls } f \text{ gerade,} \\ 0 & \text{, falls } f \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wenn $n \to \infty$. Analog erhält man

$$S_f(Z_n) = \begin{cases} \frac{2a}{n}\sum_{j=1}^n M_{n+j} & \text{, falls } f \text{ gerade,} \\ \frac{a}{n}\sum_{j=1}^n (M_{n+j}-m_{n+j}) & \text{, falls } f \text{ ungerade} \end{cases} \to \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x & \text{, falls } f \text{ gerade,} \\ 0 & \text{, falls } f \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wenn $n \to \infty$. Insgesamt folgt also

$$2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leftarrow s_f(Z_n) \leqslant s_f = \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = S_f \leqslant S_f(Z_n) \to 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn $n \to \infty$ und f gerade, sowie

$$0 \leftarrow s_f(Z_n) \leqslant s_f = \int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = S_f \leqslant S_f(Z_n) \to 0,$$

wenn $n \to \infty$ und f ungerade. Daraus folgt die Behauptung.
Alternativ hätte man hier auch direkt **Satz 11.5** verwenden können: Nach **Satz 11.5** genügt es, *eine* Riemannsumme, also z.B. die (Unter- bzw.) Obersumme ($s_f(Z_n)$ bzw.) $S_f(Z_n)$ zu berechnen. Da die Feinheit von $(Z_n)_n$ gegen 0 konvergiert, konvergiert dann $((s_f(Z_n))_n$ bzw.) $(S_f(Z_n))_n$ gegen das Integral $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Die Berechnung von ($\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n)$ bzw.)$\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n)$ ergibt sich dann wie oben.

b) (i) Zunächst ist $f : [-\pi/6, \pi/6] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{\cos^2(x)} \sin^3(x)$ monoton und damit integrierbar. Außerdem ist f ungerade und daher gilt nach vorherigem Aufgabenteil

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

(ii) Definiere $g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Nach **Satz 11.4** und **Satz 11.6** ist g als abschnittsweise monotone Funktion integrierbar. Es gilt nach **Aufgabe 30b)**

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \;=\; \frac{1}{2}(1 - \sin(x)).$$

Da sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ungerade ist, folgt schließlich

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2}.$$