Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
22.01.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 61 (Übung)

a) Leiten Sie mit Hilfe partieller Integration eine Rekursionsformel für $\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}$) her und zeigen Sie damit, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Wallissche Produktfolge

$$w_n := \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int \underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{=:u(x)}\underbrace{\cos(x)}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} \cos^{n-1}(x)\sin(x) - (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \cos^{n-1}(x)\sin(x) + (n-1)\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Bringen wir den letzten Summanden auf die linke Seite und dividieren durch n, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da der erste Term für die Grenzen 0 und $\pi/2$ entfällt für $n \geqslant 2$, ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}$$

sowie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(k-1)+1}(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=\sin(\pi/2)-\sin(0)=1} = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

b) Definieren wir

$$c_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(x)\,\mathrm{d}x,$$

so folgt nach **a)**

$$w_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}} = \frac{\pi}{2}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$$

Wegen $\cos(x) \in [0,1]$ für $x \in [0,\pi/2]$ folgt $\cos^{2n}(x) \geqslant \cos^{2n+1} \geqslant \cos^{2n+2}(x)$ auf diesem Intervall, was wegen der Monotonie des Integrals $c_{2n} \geqslant c_{2n+1} \geqslant c_{2n+2}$ liefert. Deshalb folgt

$$1 \geqslant \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \geqslant \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

was nach dem Sandwichkriterium für Folgen die Behauptung liefert.

Aufgabe 62 (Tutorium)

Berechnen Sie für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot\sin(lx)\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cdot\cos(lx)\,dx.$$

Lösungsvorschlag

Aus den Additionstheoremen folgt $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$. Damit erhalten wir für $|k| \neq |l|$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos((k-l)x)-\cos((k+l)x)]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-l)x)}{k-l}\right]_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+l)x)}{k+l}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \;=\; 0.\end{aligned}$$

Für $k = l \neq 0$ ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kx)\,dx \;=\; \pi.$$

Für $k = -l \neq 0$ ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2kx)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx$$
$$= -\pi.$$

Schließlich ergibt sich für $k = l = 0$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = 0.$$

Wegen $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$ ergibt sich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } k,l \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ ergibt sich schließlich analog

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } |k| \neq |l|, \\ \pi & \text{für } |k| = |l| \neq 0, \\ 2\pi & \text{für } k = l = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 63 (Übung)

Zeigen Sie das nachfolgende.

a) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $c_k \in \mathbb{R}$ mit $\int x^k e^{-x}\,dx = -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} x^l e^{-x} + c_k$.

b) $\Gamma(k+1) := \lim_{y\to\infty} \int_0^y x^k e^{-x}\,dx = k! \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Lösungsvorschlag

a) Wir zeigen die Formel mittels Induktion über k. Für $k = 0$ haben wir

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c = -\sum_{l=0}^{0} \frac{0!}{l!} x^l e^{-x} + c.$$

Sei die Formel für ein $k \in \mathbb{N}_0$ bereits gezeigt. Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int x^{k+1}e^{-x}\,dx &= -x^{k+1}e^{-x} + \int (k+1)x^k e^{-x}\,dx \\ &\overset{\text{IV}}{=} -x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\left(-\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} x^l e^{-x}\right) + \tilde{c} \\ &= -x^{k+1}e^{-x} - \sum_{l=0}^{k} \frac{(k+1)!}{l!} x^l e^{-x} + \tilde{c} \\ &= -\sum_{l=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{l!} x^l e^{-x} + \tilde{c},\end{aligned}$$

wobei $\tilde{c}$ eine beliebige reelle Konstante ist.

b) Mit Teil a) gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(k+1) &= \lim_{y\to\infty}\int_0^y x^k e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(-\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}y^l e^{-y} + \sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}0^l e^{-0}\right) \\ &= -\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!}\left(\lim_{y\to\infty} y^l e^{-y}\right) + k! \\ &= k!,\end{aligned}$$

wobei $\lim_{y\to\infty} y^l e^{-y} = 0$ verwendet wurde nach Aufgabe 1 d), Übungsblatt 9.

Aufgabe 64 (Tutorium)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x$, **b)** $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$, **c)** $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, **e)** $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$, **f)** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x(1+\log(x))}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_1^4 \arctan\left(\sqrt{\sqrt{x}-1}\right)\mathrm{d}x$, **h)** $\displaystyle\int_1^2\frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$, **i)** $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(2x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x$.

Erinnerung: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lösungsvorschlag

a) Entweder wir erkennen direkt die Funktion $x \mapsto \frac{1}{8}(1+2x)^4$ als Stammfunktion des Integranden, oder wir nutzen die Substitution $y(x) = 1+2x$ (also $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2$, was $\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}x$ liefert, sowie $y(0) = 1$, $y(1) = 3$). Damit folgt

$$\int_0^1 (1+2x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 y^3\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}y^4\Big|_1^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

b) Wir teilen das Integral auf, um den Betrag aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x-1|\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^1 1-x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x-1\,\mathrm{d}x = \left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^1 + \left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^2 \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) - (-2-2) + (2-2) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 5.\end{aligned}$$

c) Mit der Substitution $y(x) = \arcsin(x)$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(0) = 0$, $y(1/2) = \pi/6$. Es folgt

$$\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{72}$$

d) Mit $y(x) = \sin(x)$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$, also $\cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Es folgt

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

e) Mit $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 1$, $y(4) = 2$. Es folgt

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = 2\log(1+y)\Big|_1^2 = \log(3) - \log(2) = 2\log(3/2).$$

f) Mit $y(x) = \log x$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, also $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 0$, $y(\mathrm{e}) = 1$. Es folgt

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(1+\log(x))}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \log(1+y)\Big|_0^1 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

g) Mit $y(x) = \sqrt{\sqrt{x}-1}$ gilt $\sqrt{x} = y(x)^2 + 1$ sowie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{4(y^2+1)y}$, also $\mathrm{d}x = 4y(y^2+1)\mathrm{d}y$, sowie $y(1) = 0$, $y(4) = 1$. Es folgt

$$\int_1^4 \arctan(\sqrt{\sqrt{x}-1})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4y^3 + 4y)\arctan(y)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral berechnen wir mit Hilfe partieller Integration.

$$\int_0^1 \underbrace{(4x^3+4x)}_{=:v'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{u(x)}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} (x^4+2x^2)\arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} - \int_0^1 (1+x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3\pi}{4} - (x + \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 + \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{4}{3}.$$

h) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \underbrace{x^2}_{=:u(x)} \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} -\frac{x^2}{(1+x^2)^{1/2}}\Big|_1^2 + 2\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2(1+x^2)^{1/2}\Big|_1^2 = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

i) Durch scharfes Hinsehen erkennen wir, dass $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})$ eine Stammfunktion von $x \mapsto x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})$ ist. Deshalb folgt mit partieller Integration, dass

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x^2}\sin(\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \underbrace{\mathrm{e}^{(x^2)}}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{x\mathrm{e}^{(x^2)}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})}_{=:v'(x)}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\mathrm{e}^{(x^2)}\Big|_0^1 + \int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2)}\cos(\mathrm{e}^{(x^2)})\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\mathrm{e})\mathrm{e} + \frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\sin(\mathrm{e}^{(x^2)})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\cos(1) - \sin(1) + \sin(\mathrm{e}) - \mathrm{e}\cos(\mathrm{e})).$$

Aufgabe 65 (Übung)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Man berechne

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration, um eine Rekursionsformel herzuleiten.

Lösungsvorschlag

Wir setzen $I_{n,m} := \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$. Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}
I_{n,m} &= \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx \\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1-x)^m\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}m(1-x)^{m-1}(-1)\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{m-1}\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}I_{n+1,m-1}.
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$I_{n+m,0} = \int_0^1 x^{n+m}\,dx = \left[\frac{1}{n+m+1}x^{n+m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+m+1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = I_{n,m} &= \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}I_{n+m,0} \\
&= \frac{n!\,m!}{(n+m)!}I_{n+m,0} \\
&= \frac{n!\,m!}{(n+m)!}\cdot\frac{1}{n+m+1} \\
&= \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}.
\end{aligned}$$

Für das zweite Integral benutzen wir die Substitution $x = 2t - 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1+x)^n (1-x)^m \, dx &= \int_0^1 (2t)^n (2-2t)^m \cdot 2\, dt \\
&= 2^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt \\
&= 2^{n+m+1} I_{n,m} \\
&= 2^{n+m+1} \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 66 (Tutorium)

Bestimmen Sie, wo möglich, die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int \arcsin(x)\, \mathrm{d}x,$ **b)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x,$ **c)** $\displaystyle\int (\log(x))^2\, \mathrm{d}x,$

d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, \mathrm{d}x,$ **e)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(ax)\, \mathrm{d}x,$ **f)** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8}\, \mathrm{d}x.$

Lösungsvorschlag

a) Mit partieller Integration folgt

$$\int \arcsin(x)\, \mathrm{d}x = \int \underbrace{\arcsin(x)}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{1}_{v'(x)}\, \mathrm{d}x = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

für $x \in (-1, 1)$.

b) Mit der Substitution $y(x) = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, also $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$. Somit folgt

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = 2 \int y\mathrm{e}^y\, \mathrm{d}y\Big|_{y=\sqrt{x}}.$$

Das letzte Integral berechnen wir über partielle Integration. Es gilt

$$\int \underbrace{y}_{=:u(x)} \underbrace{\mathrm{e}^y}_{=:v'(x)}\, \mathrm{d}y \overset{P.I.}{=} y\mathrm{e}^y - \int \mathrm{e}^y\, \mathrm{d}y = y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y + C = (y-1)\mathrm{e}^y + C.$$

Somit folgt insgesamt

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = 2(\sqrt{x} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$$

für $x > 0$.

c) Nach der Vorlesung (Vorgehen analog zu **a)**) ist eine Stammfunktion von log gegeben durch $x \mapsto x\log(x) - x$. Durch partielle Integration folgt

$$\int (\log(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int \log(x)\log(x) \, \mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} \log(x)(x\log(x) - x) - \int \log(x) - 1 \, \mathrm{d}x$$
$$= \log(x)(x\log(x) - x) - (x\log(x) - x - x) + C = x(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C$$

für $x > 0$. Alternativ können wir auch $y(x) = \log(x)$ substituieren und das so entstehende Integral über $y^2 \mathrm{e}^y$ mit partieller Integration berechnen.

d) Für $x \in (-1, 1)$ folgt mit partieller Integration, dass

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{(1-x)}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=:v'(x)} \, \mathrm{d}x = (1-x)\arcsin(x) + \int \arcsin(x) \, \mathrm{d}x$$

Mit **a)** folgt demnach

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, \mathrm{d}x = (1-x)\arcsin(x) + x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

e) Mit zweimaliger partieller Integration folgt

$$\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=:v'(x)} \underbrace{\sin(ax)}_{=:u(x)} \, \mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} \mathrm{e}^x \sin(ax) - a \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{=:v'(x)} \underbrace{\cos(ax)}_{=:u(x)} \, \mathrm{d}x$$
$$\overset{P.I.}{=} \mathrm{e}^x \sin(ax) - a\mathrm{e}^x \cos(ax) - a^2 \int \mathrm{e}^x \sin(ax) \, \mathrm{d}x.$$

Addieren wir auf beiden Seiten das letzte Integral und dividieren durch $1 + a^2$, so erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^x \sin(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+a^2}(\sin(ax) - a\cos(ax)) + C$$

für $x \in \mathbb{R}$.

f) Es gilt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} \, \mathrm{d}x = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} \, \mathrm{d}x - \frac{3}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2}+1)^2 + 1} \, \mathrm{d}x.$$

Im erste Integral erkennen wir im Zähler die Ableitung des Nenners, weswegen eine Stammfunktion durch $x \mapsto \log(x^2 + 4x + 8)$ gegeben ist (eine Substitution $y(x) = x^2 + 4x + 8$ macht dies deutlich). Im zweiten Integral substituieren wir $y(x) = \frac{x}{2} + 1$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}$, also $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$. Somit folgt

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} \, \mathrm{d}x = \log(x^2+4x+8) + C - \frac{3}{2} \int \frac{1}{y^2+1} \, \mathrm{d}y \Big|_{y=\frac{x}{2}+1} = \log(x^2+4x+8) - \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right) + C.$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Anmerkung: Der Ausdruck $x^2 + 4x + 8$ ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$. Stünde im Nenner des ersten

Integrals ein Ausdruck, der (auch) negativ sein kann, so müsste man die Nullstellen für die Stammfunktion natürlich ausschließen und die Stammfunktion in den restlichen Punkten wäre durch den Logarithmus des Betrags gegeben, wie man anhand einer Fallunterscheidung erkennt.