Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
01.02.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 67 (Übung)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y(x) + x, \qquad y(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des **Satzes 12.1** sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$. Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\mathrm{d}s = \Big[\sqrt{1+s^2}\Big]_{s=0}^{s=x} = \sqrt{1+x^2} - 1$$

mit $x_0 := 0$ sowie

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^x \mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}s\,\mathrm{d}s = -\int_0^x \sqrt{1+s^2}\cdot\left(-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\,\mathrm{d}s\\ &\overset{P.I.}{=} -\Big[\sqrt{1+s^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\Big]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\,\mathrm{d}s\\ &= -\sqrt{1+x^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}+1} + 1 - \Big[\mathrm{e}^{-\sqrt{1+s^2}+1}\Big]_{s=0}^{s=x} = 2 - (\sqrt{1+x^2}+1)\mathrm{e}^{-\sqrt{1+x^2}+1}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.1 der Vorlesung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)}\int_{x_0}^x \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s = 3\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}-1} - \sqrt{1+x^2} - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems. Dabei ist in unserem Fall $y_0 := y(x_0) = 1$.

Aufgabe 68 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = 2xy(x) + x^3, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$

b) $y'(x) = \frac{x^2 - 4xy(x)}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1.$

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des **Satzes 12.1** sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$.

Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x 2s\,\mathrm{d}s = \left[s^2\right]_{s=0}^{s=x} = x^2$$

mit $x_0 := 0$ sowie

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x s^3 \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int_0^x s^2 \cdot (-2s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \overset{P.I.}{=} -\frac{1}{2}\left[s^2\mathrm{e}^{-s^2}\right]_{s=0}^{s=x} - \frac{1}{2}\int_0^x (-2s)\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-s^2}\right]_{s=0}^{s=x} = \frac{1}{2} - \frac{(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz aus Abschnitt 12.3 der Vorlesung ist $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = y_0 \mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{x^2} - \frac{1+x^2}{2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation des **Satzes 12.1** sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -\frac{4x}{1+x^2}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$. Es gilt

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^x \frac{4s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = -2\left[\log(1+s^2)\right]_{s=0}^{s=x} = -2\log(1+x^2) = \log\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^x e^{-\log\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^x (1+s^2)^2 \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^x s^2 + s^4\,\mathrm{d}s \\ &= \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5}\right]_{s=0}^{s=x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Bemerkung nach Satz 12.1 der Vorlesung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = u_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}}{(1+x^2)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 69 (Übung)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y'(x) = x\mathrm{e}^{-x} y^2(x), \qquad y(0) = 1.$$

Lösungsvorschlag

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des **Satzes 12.2**, sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto xe^{-x}$, und

$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x se^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &\overset{P.I.}{=} [-se^{-s}]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x e^{-s}\,\mathrm{d}s = [-se^{-s} - e^{-s}]_{s=0}^{s=x} = 1-(1+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{y}.$$

Nach **Satz 12.2** ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0,\infty)$, also $I_{x_0} = (-1,\infty)$. Da y in -1 nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

Aufgabe 70 (Tutorium)

Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = \mathrm{e}^{y(x)}\sin(x), \qquad y(0) = -\log(3).$

b) $y'(x) = -\frac{x^2}{y^3(x)}, \qquad y(0) = \sqrt{2}.$

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des **Satzes 12.2**, sei $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $f = \sin$ und $g = \exp$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{-\log(3)}^{y} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 3 - \mathrm{e}^{-y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = -\log(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$, was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation des Satzes 12.4, sei $I = \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x^2$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{1}{y^3}$. Wegen $u_0 = \sqrt{2}$ bietet es sich an, $J = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte

Intervall, welches y_0 enthält und auf dem g das Vorzeichen von $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{x} -s^2\,\mathrm{d}s = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{y} y^3\,\mathrm{d}s = \frac{y^4}{4} - 1$$

Nach **Satz 12.2** ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von y durch $y_0 = \sqrt{2}$ festgelegt ist. Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$. Da $\lim_{x \to \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$ und 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden.

Aufgabe 71 (Übung)

Seien $\gamma, \omega_0 > 0$ mit $\omega_0 > \gamma$. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems.

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin(\omega_0 x), \qquad y(0) = 1,\, y'(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{<0}} = -\gamma \pm \mathrm{i}\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=:\omega}$$

Nach **Satz 12.4** der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x}\sin(\omega x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2\gamma y'(x) + \omega^2 y(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In der Notation der Vorlesung (nach **Satz 12.5**) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = \omega_0$. Da $\mathrm{i}\omega_0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \omega_0(-A\sin(\omega_0 x) + B\cos(\omega_0 x)) \\ y_p''(x) &= \omega_0^2(-A\cos(\omega_0 x) - B\sin(\omega_0 x)) \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 2\gamma y_p'(x) + \omega_0^2 y_p(x) &= \left(-A\omega_0^2 + B2\gamma\omega_0 + A\omega_0^2\right)\cos(\omega_0 x) + \left(-B\omega_0^2 - A2\gamma\omega_0 + B\omega_0^2\right)\sin(\omega_0 x) \\ &= 2\gamma\omega_0 B\cos(\omega_0 x) - 2\gamma\omega_0 A\sin(\omega_0 x) \\ &\overset{!}{=} \sin(\omega_0 x) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für $B = 0$ und $A = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = -\frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + c_2 e^{-\gamma x}\sin(\omega x) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x)$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$c_1 - \frac{1}{2\gamma\omega_0} = y(0) \overset{!}{=} y_0 = 1,$$

also $c_1 = 1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}$, und wegen

$$y'(x) = -\gamma e^{-\gamma x}\cos(\omega x) - \omega e^{-\gamma x}\sin(\omega x) - c_2\gamma e^{-\gamma x}\sin(\omega x) + c_2\omega e^{-\gamma x}\cos(\omega x) + \frac{1}{2\gamma}\sin(\omega_0 x)$$

ist

$$-c_1\gamma + c_2\omega = y'(0) \overset{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1\gamma}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{2\gamma\omega_0}\right)e^{-\gamma x}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) + \frac{1}{\omega}\left(\gamma + \frac{1}{2\omega_0}\right)e^{-\gamma x}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x\right) - \frac{1}{2\gamma\omega_0}\cos(\omega_0 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 72 (Tutorium)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Lösungsvorschlag

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach **Satz 12.4** der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 t e^{-x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

In der Notation der Vorlesung (nach **Satz 12.5**) gilt für unsere Inhomogenität $m = 0$, $\alpha = 2$ und $\beta = 0$. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ae^{2x}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ae^{2x}, \\ y_p''(x) &= 4Ae^{2x} \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 9Ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für $A = \frac{1}{9}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$$

gegeben, wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$y'(x) = -\frac{8}{9}e^{-x} - c_2 x e^{-x} + c_2 e^{-x} + \frac{2}{9}e^{2x}$$

ist

$$y'(0) = -\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = c_2 - \frac{6}{9} \stackrel{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x) = \frac{8}{9}e^{-x} + \frac{6}{9}xe^{x} + \frac{1}{9}e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$