Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
25.01.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 73 (Übung)

a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+3)e^{nx}$$

konvergiert. Bestimmen Sie für diese x den Wert der Reihe.

b) Berechnen Sie, falls existent, den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,dx$$

Aufgabe 74 (Tutorium)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Untervektorräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind.

a) $U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$,

b) $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -3x_3\}$,

c) $U := \{f \in V = C^1[0,1] \mid \int_0^1 f(x)\,dx + f'(1/2) = 1\}$,

d) $U := \{f \in V = Abb(\mathbb{R};\mathbb{R}) \mid f$ hat mindestens eine Nullstelle$\}$.

Aufgabe 75 (Übung)

In Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das uneigentliche Integral

$$I_s := \int_0^{\infty} \frac{1}{x^s + x^{1/s}}\,dx$$

gegeben. Bestimmen Sie alle s, für die I_s konvergiert.

Aufgabe 76 (Tutorium)

a) Sei $\emptyset \neq M \subseteq V$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\mathrm{lin}(M)$ der Durchschnitt aller Untervektorräume von V ist, die M enthalten.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

(ii) Ist $M := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

(iii) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dann sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

(iv) Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

(v) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Aufgabe 77 (Übung)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert (wobei in (i) $s < 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei).

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{st} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \log(1+t)\,\mathrm{d}t$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{(\log k)^2}{k^{\log(\log k)}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.

Aufgabe 78 (Tutorium)

a) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \log(|t|)\,\mathrm{d}t$.

b) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$ auf Konvergenz mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums.