Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
01.02.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 79 (Übung)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

Aufgabe 80 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

b) Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an.

(i) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 = x_3\}$,

(ii) $\mathrm{lin}(\{x^2,\, x^2+x,\, x^2+1,\, x^2+x+1,\, x^7+x^5\})$

Aufgabe 81 (Übung)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und entscheiden Sie, in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 82 (Tutorium)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(A|b)$ und $\mathrm{rg}(A|c)$.

b) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Kern} A)$ und geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$ an.

c) Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichungen $Ax = b$ und $Ax = c$ an.

Aufgabe 83 (Übung)

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert durch $(A^T)_{ij} := a_{ji}$. Die Abbildung $P : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ sei definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & \dots & a_{1n}+a_{n1} \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & \dots & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $P(\alpha A + B) = \alpha P(A) + P(B)$.

b) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $P(A) = 0 \Leftrightarrow A^T = -A$. In diesem Fall heißt A *schiefsymmetrisch*.

c) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A \in P(\mathbb{K}^{n\times n}) \Leftrightarrow A^T = A$. In diesem Fall heißt A *symmetrisch*.

d) $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | P(A) = 0\}) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim(\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} | A \in P(\mathbb{K}^{n\times n})\}) = \frac{n(n+1)}{2}$

Aufgabe 84 (Tutorium)

a) Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$ seien der Vektor $y = (1, 5\mathrm{i} - 1, 1 - \mathrm{i}, c^2)$ und der Untervektorraum

$$U = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{i} \\ -c-\mathrm{i} \\ c^2+2c\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i}-1+c \\ -c-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\right\}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, für die $y \in U$ gilt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ und von $\operatorname{Bild} A$.