Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc.

WS 2015/2016
12.02.2016

Höhere Mathematik für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 85 (Übung)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Kern ϕ und eine Basis von Bild ϕ.

c) Für welche n ist ϕ injektiv?

Lösungsvorschlag

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n kx_k$ eine Abbildung.

a) Aufgrund von

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n}$$

ist $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ linear.

Alternativ kann man die Linearität von ϕ auch wie folgt begründen:

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\phi(\alpha x + y) = \phi(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{pmatrix}) = \sum_{k=1}^n k(\alpha x_k + y_k) = \alpha \sum_{k=1}^n kx_k + \sum_{k=1}^n ky_k = \alpha\phi(x) + \phi(y).$$

b) Wegen $\phi(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt Bild $\phi = \mathbb{K}$, also ist $\{1\}$ eine Basis von Bild A = Bild ϕ.

Insbesondere ist dim (Bild A) = 1.

Nun überlegen wir uns, wie viele Basisvektoren Kern ϕ = Kern A aufspannen. Die Dimensionsformel liefert n = dim (Bild A) + dim (Kern A), folglich ist dim Kern $A = n - 1$. Wir bestimmen

Kern ϕ = Kern A: Jeder der $n-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

ist in Kern ϕ enthalten. Diese Vektoren (bzw. die Negativen davon) erhalten wir durch Einsetzen von Parametern für $x_2, \dots, x_n$ in der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0$$

oder über den (-1)-Trick (denn Kern A ist die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = 0$). Da die angegebenen $n-1$ Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Kern ϕ:

$$\text{Kern } \phi = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Wegen ϕ injektiv $\iff$ Kern $\phi = \{0\}$ $\iff$ dim Kern $\phi = 0$ ist ϕ genau für $n = 1$ injektiv.

Aufgabe 86 (Übung)

a) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, \qquad \phi(e_2 + e_3) = e_1, \qquad \phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_2 - e_3.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen A_B^B und $A_{B'}^{B'}$ von ϕ bezüglich der Standardbasis B des $\mathbb{R}^3$ sowie bezüglich der Basis $B' = \{e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$.

b) Die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ sei gegeben durch $P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ (siehe **Aufgabe 83**). Geben Sie die Abbildungsmatrix A_B^B von P bezüglich der Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ an.

Lösungsvorschlag

a) Um die Darstellungsmatrix bezüglich bestimmter Basen herauszufinden, müssen wir die Elemente der Basis im Urbildraum einsetzen und das Bild dieser Basisvektoren anhand der Basis im Bildraum ausdrücken. Wir machen dies zuerst für die Standardbasis B. Da ϕ linear ist, gilt

$$\phi(e_1) = \phi((e_1 + e_2 + e_3) - (e_2 + e_3)) = \phi(e_1 + e_2 + e_3) - \phi(e_2 + e_3) = (e_2 - e_3) - e_1 = -e_1 + e_2 - e_3,$$

$$\phi(e_2) = \phi((e_2 + e_3) - e_3) = \phi(e_2 + e_3) - \phi(e_3) = e_1 - (2e_1 + 3e_2 + 5e_3) = -e_1 - 3e_2 - 5e_3,$$

$$\phi(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3.$$

Somit ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$A_B^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Bilder der Basisvektoren von B' kennen wir bereits, wir müssen Sie bloß umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(e_3) &= 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 = 2e_3 + (e_2 + e_3) + 2(e_1 + e_2 + e_3), \\ \phi(e_2 + e_3) &= e_1 = -(e_2 + e_3) + (e_1 + e_2 + e_3), \\ \phi(e_1 + e_2 + e_3) &= e_2 - e_3 = -2e_3 + (e_2 + e_3). \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$A_{B'}^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bezeichnen wir die vier Basismatrizen in ihrer Reihenfolge als b_1, b_2, b_3 und b_4, so gilt

$$P(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_1,$$

$$\begin{aligned} P(b_2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3, \\ P(b_3) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3, \\ P(b_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b_4. \end{aligned}$$

Die Abbildungsmatrix ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 87 (Übung)

In $\mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 3}$ seien die folgenden Matrizen gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob diese Matrizen regulär sind. Berechnen Sie, wenn möglich, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} und $(AB)^{-1}$.

Lösungsvorschlag

Die Matrix C ist nicht regulär, da sie Rang 2 besitzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-4)\ \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Matrizen A und B sind regulär. Die Inverse von A ergibt sich durch

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot\frac{14}{3}\ \cdot(-2) \\ + \quad \mid \cdot 3 \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \quad \mid \cdot \frac{1}{3} \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Deshalb gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Analog folgt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \quad \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right),$$

also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nach Vorlesung ist nun auch AB regulär und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (siehe **3.2** "Hemd-Jacke"-Regel.). Nach der Definition der Multiplikation von Matrizen ("Zeile mal Spalte") ergibt sich

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix} .$$