**Institut für Analysis**
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets  Johanna Richter, M.Sc.  Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
26.10.2016

# Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 7:**
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x^2 - x + 2 | x \in \mathbb{R}\right\}$,

(b) $B = \left\{n + \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Aufgabe 8:**
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x + \frac{1}{x} \middle| 0 < x \leq 42\right\}$,

(b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$.

**Aufgabe 9:**
Bestimmen Sie jeweils die Menge $M$ aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|2x - 10| \leq x$,

(b) $|x - 2|\,|x + 2| = 2$,

(c) $|x + 2| > |x - 3|$,

(d) $|2 - |2 - x|| = 2$.

**— Bitte wenden! —**

**Aufgabe 10:**
Bestimmen Sie jeweils die Menge $M$ aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(b) $\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2$,

(c) $|x - 4| = |x + 1|$.

(d) $||x + 1| - 2| \leq x$,

**Aufgabe 11:**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die erste Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.

**Aufgabe 12:**
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die letzte Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.
**Hinweis:** Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k - 1)^3 = n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 7, 9 und 11 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.