

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 13:

(a) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^l \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

(b) Seien $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{m+1, \dots, m+n\}$ bzw. $b_l = 0$ für $l \in \{n+1, \dots, m+n\}$. Zeigen Sie

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k.$$

Aufgabe 14:

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} \binom{n}{l-k}.$$

Hinweise: Betrachten Sie das Polynom $p(z) := (1+z)^{m+n}$ und verwenden Sie Aufgabe 13 (b). Hier ist $\binom{n}{k} := 0$, falls $k < 0$ oder $k > n$.

Aufgabe 15:

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1+i| = |z-3-3i|\}$,

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$.

Aufgabe 16:

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2i| < 3\}$,

(ii) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) \leq 1\}$.

Aufgabe 17:

(a) Sei $z = 4 - 3i$. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(i) z^3 ,

(ii) $\frac{1}{z}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 + 8 = 0.$$

Aufgabe 18:

(a) Seien $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie den Betrag von

(i) $z \cdot w$,

(ii) $\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}$.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 - (3 - i)z^2 - iz + 1 + 3i = 0.$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung z mit $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 13, 15 und 17 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.