

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13:

(a) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über l .

- *IA* ($l = 0$):
Für $l = 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^l \binom{k+n}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

- *IS* ($l \rightsquigarrow l+1$):
Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses l gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{n=0}^l \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Nach Lemma aus dem Abschnitt 4.10 gilt

$$\binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.$$

Dann gilt für $l+1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{l+1} \binom{k+n}{k} &= \binom{k+l+1}{k} + \sum_{n=0}^l \binom{k+n}{k} \\ &\stackrel{(IV)}{=} \binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}. \end{aligned}$$

(b) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über m .

- *IA* ($m = 0$):
Es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) = a_0 \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$.

- *IS* ($m \rightsquigarrow m+1$):

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses m gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\left(\sum_{k=0}^m \tilde{a}_k \tilde{z}^k \right) \left(\sum_{l=0}^n \tilde{b}_l \tilde{z}^l \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^k \tilde{a}_{k-l} \tilde{b}_l \right) \tilde{z}^k$$

für jedes $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_n \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{a}_k = 0$ für $k \in \{m+1, \dots, m+n\}$ bzw. $\tilde{b}_l = 0$ für $l \in \{n+1, \dots, m+n\}$. Dann gilt für $m+1$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) &= \left(a_{m+1} z^{m+1} + \sum_{k=0}^m a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) \\ &= a_{m+1} z^{m+1} \left(b_n z^n + \sum_{l=0}^{n-1} b_l z^l \right) + \left(\sum_{k=0}^m a_k z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l z^l \right) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{l=0}^n a_{m+1} b_l z^{l+m+1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{\substack{l=0, \\ k-l \neq m+1}}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &\stackrel{\text{Index-}}{\text{shift}} a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} a_{m+1} b_{k-m-1} z^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^m \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k + \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\sum_{\substack{l=0, \\ k-l \neq m+1}}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^m \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(a_{m+1} b_{k-m-1} + \sum_{\substack{l=0, \\ k-l \neq m+1}}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^m \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &= a_{m+1} b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n+1} \left(\sum_{l=0}^k a_{k-l} b_l \right) z^k. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 14:

Halten wir zunächst die folgende Folgerung aus Abschnitt 5.5 des Skriptes fest.

Satz (Koeffizientenvergleich). *Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, etwa*

$$p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k, \quad q(z) = \sum_{l=0}^m b_l z^l$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$. Gilt $p(z) = q(z)$ für unendliche viele paarweise verschiedene $z \in \mathbb{C}$, so gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \{0, \dots, m\}$.

Beweis. Betrachte $r := p - q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Voraussetzung hat r unendlich viele Nullstellen. Entweder, $a_k - b_k = 0$ für alle $k \in \{0, \dots, m\}$ und es ist nichts zu zeigen, oder r hat einen Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Abschnitt 5.5 des Skriptes hätte r dann aber höchstens n Nullstellen, was nicht der Fall ist. \square

Dem Hinweis folgend betrachten wir das Polynom $p(z) = (1+z)^{m+n}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $p(z) = (1+z)^{m+n} = (1+z)^m (1+z)^n$. Nach dem Binomialsatz aus Abschnitt 4.11 des Skriptes gilt also einerseits

$$(1+z)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} z^k 1^{m+n-k} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} z^k.$$

Andererseits — unter Anwendung der Aufgabe 13 (b) — aber auch

$$(1+z)^m (1+z)^n = \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k \right) \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} z^l \right) = \sum_{k=0}^{m+n} z^k \left(\sum_{l=0}^k \binom{m}{k-l} \binom{n}{l} \right).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{m}{l-k} \binom{n}{k} \stackrel{\text{Summationsreihenfolge}}{=} \sum_{k=0}^l \binom{m}{k} \binom{n}{l-k}.$$

\square

Aufgabe 15:

(i) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \in A &\Leftrightarrow |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i| \\ &\Leftrightarrow |(x+1) + i(y+1)|^2 = |(x-3) + i(y-3)|^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2y + 2 = -6x - 6y + 18 \\ &\Leftrightarrow 8y = -8x + 16 \Leftrightarrow y = 2 - x, \end{aligned}$$

d.h. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 2 - \operatorname{Re}(z)\}$. Also ist A eine Gerade in der komplexen Zahlenebene. Siehe auch Abbildung (1).

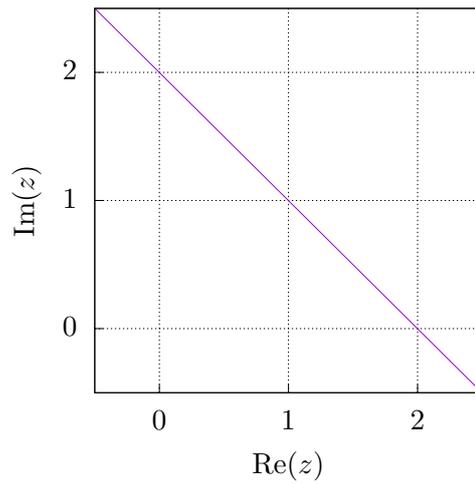


Abbildung 1: Menge A

(ii) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \in C &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) > 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}((x + iy)^2) > 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2ixy) > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{1 + y^2} \vee x < -\sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Also ist $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \sqrt{1 + (\operatorname{Im}(z))^2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < -\sqrt{1 + (\operatorname{Im}(z))^2} \right\}$. Siehe auch Abbildung (2).

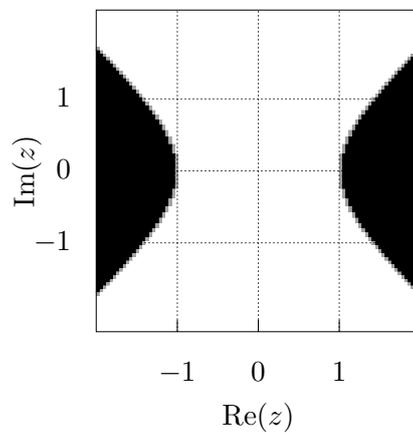


Abbildung 2: Menge B

□

Aufgabe 16:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
 A &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2i| < 3\} \\
 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2i| < 3\} \\
 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2i| < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1\}^c \\
 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - 2i| < 3\} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1\}.
 \end{aligned}$$

Also ist A die offene Kugel um $1 + 2i$ mit Radius 3 ohne die offene Kugel um i mit Radius 1. Siehe auch Abbildung (3).

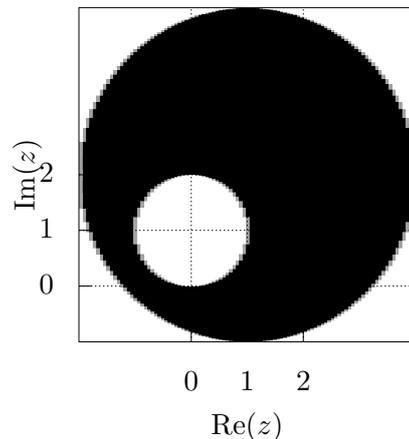


Abbildung 3: Menge A

(ii) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$z \in B \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2) \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}((x + iy)^2) \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2ixy) \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}.$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

- Ist $x = 0$, dann ist $z \in B$.
- Ist $x > 0$, dann ist $z \in B \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x}$.
- Ist $x < 0$, dann ist $z \in B \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2x}$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
 B &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \\
 &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\} \\
 &\cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \geq \frac{1}{2\operatorname{Re}(z)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Siehe auch Abbildung (4).

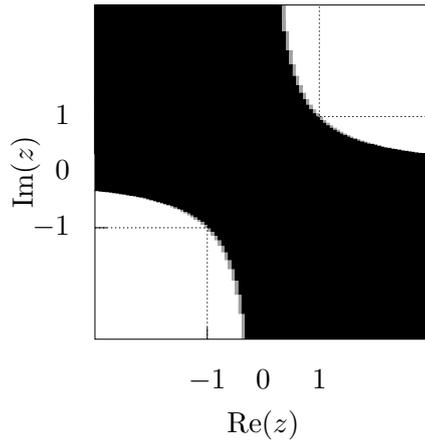


Abbildung 4: Menge B

□

Aufgabe 17:

(a) Im Folgenden sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} w^3 &= (a + ib)^3 = a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 \\ &= a(a^2 - 3b^2) + ib(3a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Einsetzen von $w = 4 - 3i = z$ liefert

$$\operatorname{Re}(z^3) = 4(4^2 - 3(-3)^2) = -44, \quad \operatorname{Im}(z^3) = -3(3 \cdot 4^2 - (-3)^2) = -117.$$

Ferner gilt

$$|w^3| = \sqrt{(w^3)\overline{w^3}} = \left(\sqrt{w\overline{w}}\right)^3 = |w|^3.$$

Da $|z| = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{25} = 5$, folgt $|z^3| = |z|^3 = 125$.

(ii) Für $w \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Einsetzen von $w = 4 - 3i = z$ liefert

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{25}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{25}.$$

Ferner gilt für $w \neq 0$

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = \frac{1}{|w|^2} |a - ib| = \frac{1}{|w|^2} \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}.$$

Also ist $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{5}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}z^3 + 8 = 0 &\Leftrightarrow (x + iy)^3 + 8 = 0 \\&\Leftrightarrow x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + 8 = 0 \\&\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge 3x^2y - y^3 = 0 \\&\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge y(3x^2 - y^2) = 0 \\&\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 8 = 0 \wedge (y = 0 \vee y = x\sqrt{3} \vee y = -x\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

- Ist $y = 0$, so gilt

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- Ist $y = x\sqrt{3}$, so gilt

$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z = 1 + i\sqrt{3}$.

- Ist $y = -x\sqrt{3}$, so gilt

$$x^3 - 9x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Insgesamt sind also genau $z_0 = -2$, $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung $z^3 + 8 = 0$.

□

Aufgabe 18:

(a) (i) Es gilt

$$z \cdot w = (3 - i) \cdot (-1 + 2i) = -3 - 2(i)^2 + i(1 + 6) = -1 + 7i$$

und damit $\operatorname{Re}(z \cdot w) = -1$, $\operatorname{Im}(z \cdot w) = 7$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 5\sqrt{2}$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2} &= (3 + i)^2 + \frac{\bar{w}^2}{|w|^4} = 3^2 + 6i - 1 + \frac{(-1 - 2i)^2}{25} = 8 + 6i + \frac{1}{25}(1 + 4i - 4) \\&= 8 - \frac{3}{25} + \left(6 + \frac{4}{25}\right)i\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right) &= 8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}, & \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right) &= 6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}, & \text{ sowie} \\ \left|\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{197}{25}\right)^2 + \left(\frac{154}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{38809 + 23716} = \frac{\sqrt{2501}}{5}.\end{aligned}$$

(b) Dem Hinweis folgend, machen wir den Ansatz $z = (1 + i)x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned} & ((1 + i)x)^3 - (3 - i)((1 + i)x)^2 - i(1 + i)x + 1 + 3i = 0 \\ \Leftrightarrow & (1 + 3i + 3i^2 - i)x^3 - (3 - i)(1 + 2i + i^2)x^2 - i(1 + i)x + 1 + 3i = 0 \\ \Leftrightarrow & (-2 + 2i)x^3 - (3 - i)2ix^2 - i(1 + i)x + 1 + 3i = 0 \\ \Leftrightarrow & -2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \wedge 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Addieren der beiden letzten Gleichungen liefert

$$-8x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also sind $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ und $z_1 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ zwei der gesuchten Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^3 - (3 - i)z^2 - iz + 1 + 3i$. Nach dem Satz über die Polynomdivision lässt sich P durch $Q = (z - z_0) \cdot (z - z_1) = (z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}) \cdot (z + \frac{1+i}{\sqrt{2}}) = (z^2 - \frac{(1+i)^2}{2}) = z^2 - i$ dividieren. Tatsächlich ergibt die Polynomdivision

$$z^3 - (3 - i)z^2 - iz + 1 + 3i = (z^2 - i) \cdot (z - (3 - i)).$$

Die letzte Nullstelle lautet also $z_2 = (3 - i)$.

□