Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets   Johanna Richter, M.Sc.   Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
09.11.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19:
Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren und $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$ gilt.

Aufgabe 20:
Seien (a_n), (b_n) komplexe, konvergente Zahlenfolgen — etwa $a_n \to a \in \mathbb{C}$ und $b_n \to b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

(i) $a_n b_n \to ab$,

(ii) falls $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Aufgabe 21:
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{2^n+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $(c_n) = \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iv) $(d_n) = \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(vi) $(f_n) = \left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 22:
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $(c_n) = \left(\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iv) $d_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4\mathrm{i}}{15}\right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(v) $(e_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(vi) $(f_n) = \left(\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$ fest.

Aufgabe 23:
Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Aufgabe 24:
Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 19, 21 und 23 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.