Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

WS2016/17
18.11.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25:

(a) Es gilt

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} \to 0 \qquad \text{und} \qquad a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} \to 0.$$

Nach Aufgabe 19 gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0.$$

(b) Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert. Bezeichne etwa $a := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ den Reihenwert. Für die $2N$-te Partialsumme gilt

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{2k+1}a_{2k+1} + \sum_{k=1}^{N}(-1)^{2k}a_{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^{2k}}$$

und folglich

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{4^k} + 2\sum_{n=1}^{2N}(-1)a_n = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

Nach Beispiel (1) aus dem Abschnitt 7.1 des Skriptes ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

(geometrische Reihe). Nach Annahme ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent. Dann ist also auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ konvergent (gegen $\frac{4}{3}+2a$). Aber nach Beispiel (3) aus Abschnitt 7.1 des Skriptes ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe). Also muss die Annahme verworfen werden — $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist divergent.

(c) Die Folge (a_n) ist nicht monoton fallend. Wegen $2^{2k} \geq 1 + 2k > k + 1$ ist

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} < \frac{1}{2k+2} = a_{2k+2}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$.

□

Aufgabe 26:

(a) Für $n=1$ ist $a_n = 2 > 0$. Für $n > 1$ ist $\sqrt{n} < n$ bzw. $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Deshalb gilt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 ist klar wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ und $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Nach dem Leibniz-Kriterium aus Abschnitt 7.5 des Skriptes ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Wäre die Reihe $\sum_{n=1}(-1)^n a_n$ konvergent, so wäre auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

konvergent. Nach Beispiel (3) aus Abschnitt 7.1 des Skriptes ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jedoch divergent. Also muss die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ divergieren.

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton fallend (keine leichte Rechnung).

□

Aufgabe 27:

(i) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$\begin{aligned} S_N \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)!} \\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} 1 - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Reihe konvergent und es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} S_N = 1$.

(ii) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$\begin{aligned} S_N \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{4^k} \\ &\overset{\text{Binom.}}{=} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist die N-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mit $0 < z = \frac{3}{4} < 1$. Nach Beispiel (1) aus Abschnitt 7.1 des Skriptes ist der Reihenwert der geometrischen Reihe in diesem Fall $\frac{1}{1-z} = 4$. Also ist die vorliegende Reihe konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \lim_{N\to\infty} S_N = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3$.

□

Aufgabe 28:

(i) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+1)e^{-n} - ne^{-(n+1)}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-n}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)}$$
$$\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{e^{-n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{e} - \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{e^{N+1}}.$$

Folglich ist die Reihe konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{e}$.

(ii) Sei $N \in \mathbb{N}$. Für die N-te Partialsumme S_N der Reihe gilt

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}} = 4x \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(4x)^{n-1}}{(1+2|x|)^{n-1}} \overset{\text{Indexshift}}{=} 4x \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{4x}{1+2|x|}\right)^n.$$

Der zweite Faktor ist die $(N-1)$-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{n=0} y^n$ mit $y = \frac{4x}{1+2|x|}$. Nach Beispiel (1) des Abschnittes 7.1 des Skriptes ist die geometrische Reihe genau dann konvergent, wenn $|y| < 1$ ausfällt. Es gilt

$$|y| < 1 \Leftrightarrow \frac{4|x|}{1+2|x|} < 1 \Leftrightarrow 4|x| < 1 + 2|x| \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}.$$

In diesem Fall beträgt der Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-\frac{4x}{1+2|x|}} = \frac{1+2|x|}{1+2(|x|-2x)}$. Folglich gilt dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}} = 4 \cdot \frac{x(1+2|x|)}{1+2(|x|-2x)}$.

Ist $|y| \geq 1$, so ist $x \neq 0$. Folglich muss $\sum_{n\geq 1} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$ divergieren, da ansonsten die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ mit einem $|y| \geq 1$ konvergent wäre.

□

Aufgabe 29:

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\left|(-1)^n \binom{2n}{n}\right| = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\prod_{j=1}^{2n} j}{\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2} = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n} j}$$
$$\overset{\text{Indexshift}}{=} \frac{\prod_{j=1}^{n}(n+j)}{\prod_{j=1}^{n} j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{j} = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\left(1 + \frac{n}{j}\right)}_{\geq 2} \geq 2^n.$$

Wegen $(2^n) \to \infty$, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n \binom{2n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Nach Satz (4) aus Abschnitt 7.2 des Skriptes ist dies aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} b_n \quad &:= \quad \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1}\right|^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \quad \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) \to \frac{1}{e}$ (vgl. Aufgabe 21 (v)) und $\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right) \to 1$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} < 1.$$

Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

(iii) Für $0 < a < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \sqrt[n]{a} < 1$ und $0 < \sqrt[n+1]{a} < 1$. Deshalb gilt

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n+1]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{a\,\sqrt[n]{a}} < \sqrt[n+1]{a \cdot 1} = \sqrt[n+1]{a}.$$

Folglich ist $(1 - \sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend. Ferner ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ konvergent.

Erinnerung (*dritte binomische Formel* — siehe (1) im Abschnitt 4.11 des Skriptes): Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k} \cdot \beta^k. \tag{1}$$

Einsetzen von $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt[n]{a}$ und Umstellen nach $\alpha - \beta$ liefert

$$\left|(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})\right| = 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}_{\leq 1}} \geq \frac{1-a}{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = (1-a) \cdot \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1-a}{n} = (1-a)\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergent ist, liefert das Minorantenkriterium zusammen mit der obigen Abschätzung, dass $\sum_{n\geq 1}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ *nicht* absolut konvergent ist.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = (n+1)\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ (absolut) konvergent ist.

(v) Für alle $n \geq 3$ gilt

$$a_n := \frac{n+4}{n^2-3n+1} = \frac{n+4}{\underbrace{n(n-3)+1}_{>0}} \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \geq 0$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ ist nach der Vorlesung divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$ divergent nach dem Minorantenkriterium.

(vi) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|(-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]\right| = \left|\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right| = \left|\frac{(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)}\right| = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$$

und die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent nach Vorlesung. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right]$ ist nach dem Majorantenkriterium folglich auch absolut konvergent.

□

Aufgabe 30:

(i) Natürlich ist $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ konvergent für $x = 0$. Sei also im Folgenden $x \neq 0$. Dann ist $y := x^2 > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{1}{y^{-n}+y^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n}.$$

Ist $y = 1$, so gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} = \frac{1}{1^n + 1^n} = \frac{1}{2}$$

und folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Nach Satz (4) aus Abschnitt 7.2 des Skriptes ist dies aber eine notwendige Bedingung dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ divergent für $x^2 \in \{-1, 1\}$.

Ist $y \neq 1$, so ist $y < 1$ oder $\frac{1}{y} < 1$. O.B.d.A. sei $y < 1$. Dann gilt

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n + y^n} < \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^n} = y^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 1} y^n$ mit dem Parameter $|y| = y < 1$ ist nach Beispiel (1) des Abschnittes 7.1 des Skriptes konvergent. Weil $|a_n| < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ausfällt, ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ (absolut) konvergent nach dem Majorantenkriterium (Satz (1) aus Abschnitt 7.4 des Skriptes).

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n := \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\right|} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n \leq \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium (vgl. Abschnitt 7.6 des Skriptes) ist $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ (absolut) konvergent.

(iii) Wegen

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ *nicht* absolut konvergent ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe aus Beispiel (3) im Abschnitt 7.1 des Skriptes).

Betrachte die N-te Partialsumme $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ für $N \in \mathbb{N}$. Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Nach Aufgabe 19 gilt dies genau dann, wenn (S_{2N}) und (S_{2N+1}) gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Wir beginnen mit der Teilfolge (S_{2N}). Diese ist genau dann konvergent, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil konvergent ist. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
S_{2N} &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n}\right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\mathrm{i}^2)^n}{2n} = (-\mathrm{i}) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2n}}_{=\mathrm{Re}(S_{2N})} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}}_{=\mathrm{Im}(S_{2N})}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Re}(S_{2N})$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$. Diese ist nach dem Leibniz-Kriterium (siehe Abschnitt 7.5 des Skriptes) konvergent. Ferner ist $\mathrm{Im}(S_{2N})$ gerade die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = (-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$. Diese ist ebenfalls konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. Damit ist (S_{2N}) konvergent.

Schließlich gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \frac{\mathrm{i}^{2N+1}}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^N}{2N+1}}_{=0} = \lim_{N\to\infty} S_{2N}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergent.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{(3(n+1))^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(3n)^n}{(3(n+1))^{n+1}} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{1}{3n} \cdot \frac{(3n)^{n+1}}{(3(n+1))^{n+1}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{3} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{=\frac{1}{e}} = \frac{4}{3e}.$$

Da $e > 2$ ist $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{2}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium (siehe Abschnitt 7.7 des Skriptes), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$ (absolut) konvergent ist.

(v) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}} = \frac{n(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n^2+n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{(1-\frac{2}{\sqrt{n}})^2}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Für die Klammer im Nenner gilt $1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} \leq 1+\sqrt{2} < 3$. Für den Zähler gilt ab $n \geq 9$

$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{9}}\right) = \frac{2}{3}.$$

Deshalb folgt $a_n \geq \frac{2}{9}\frac{1}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist nach Beispiel (3) im Abschnitt 7.1 des Skriptes divergent. Folglich ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ divergent nach dem Minorantenkriterium (siehe Satz (2) im Abschnitt 7.4 des Skriptes).

(vi) Wir zeigen vorbereitend, dass

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

für alle $n \geq 3$. Sei dazu $n \geq 3$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \quad &\Leftrightarrow \quad n > \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^n = \sqrt[n+1]{(n+1)^n}\\ &\Leftrightarrow \quad n^{n+1} > (n+1)^n\\ &\Leftrightarrow \quad n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Nach Abschnitt 6.6 des Skriptes ist $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ und $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Damit gilt tatsächlich

$$n \geq 3 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für alle $n \geq 3$.

Die Reihenglieder $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ sind nach Obigem ab $n = 3$ positiv. Da es bei Konvergenzfragen auf endlich viele Reihenglieder nicht ankommt, ist $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent ist bzw. wenn $\sum_{n=3}^{\infty}a_n$ konvergent ist.

Für die N-te Partialsumme S_N der letzten Reihe gilt

$$\begin{aligned}S_N \quad &= \quad \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n} = \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n} \leq \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1}\\ &\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{n=3}^{N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} - \sum_{n=4}^{N+1}\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{\sqrt[3]{3}}{3} - \frac{\sqrt[N+1]{N+1}}{N+1} \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{3}.\end{aligned}$$

Also ist (S_N) nach oben beschränkt. Nach Satz 7.2 (1) des Skriptes ist $\sum_{n=3}^{\infty}a_n$ konvergent. Also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n}$ (absolut) konvergent.

□