Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis WS2016/17
PD Dr. Peer Christian Kunstmann 25.11.2016
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets Johanna Richter, M.Sc. Tobias Schmid, M.Sc.

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 31:
Sei $a_n = \frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Betrachte die Folge $(b_n) := \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Für ihre Teilfolgen (b_{2n}) bzw. (b_{2n+1}) gilt

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}}{(1+\frac{1}{2})^{2n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \quad \text{und} \\ b_{2n+1} &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(1+\frac{1}{2})^{2n+2}}{(1-\frac{1}{2})^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}\right)^2 \cdot 3^{2n+2} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \infty$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$. Eine Entscheidung mit dem Quotientenkriterium ist also nicht möglich.

(b) Betrachte die Folge $(c_n) := \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Für ihre Teilfolge (c_{2n}) gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{3}{2} > 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt die Divergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

□

Aufgabe 32:

(a) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{2+(-1)^{2n}}{3} = 1 \qquad \text{und} \qquad \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{2+(-1)^{2n+1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Folglich sind $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ genau die Häufungswerte der Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\frac{1}{3}, 1\right\} = 1.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes), ist

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

(b) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{3} \cdot \left(\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right)^n.$$

Also ist

$$\left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}\right| = 1 \cdot 3^{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} \infty.$$

Folglich sind $\{0, \infty\}$ genau die Häufungswerte der Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ und

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \min\{0,\infty\} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \max\{0,\infty\} = \infty.$$

Sei $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (absolut) konvergent, falls

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Nach der Folgerung (a) aus Abschnitt 7.14 des Skriptes ist also $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \leq R.$
Ebenfalls nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent, falls

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Nach der Folgerung (b) aus Abschnitt 7.14 des Skriptes ist also $\frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \geq R.$

Mit den errechneten Werten ergibt sich aber nur die triviale Abschätzung

$$0 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \leq R \leq \frac{1}{\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \infty.$$

□

Aufgabe 33:
Sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge. Damit ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergent nach dem Leibnizkriterium.

Sei ferner

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4k+1}} & \text{für } n = 3k+1, \\ \frac{1}{\sqrt{4k+3}} & \text{für } n = 3k+2, \\ -\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} & \text{für } n = 3k \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (b_n) eine Umordnung von (a_n) und es gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sei (S_N) ihre Partialsummenfolge. Für die Teilfolge (S_{3n}) gilt

$$S_{3n} = \sum_{m=1}^{3n} b_m = \sum_{k=0}^{n-1} b_{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{3k+2} + \sum_{k=1}^{n} b_{3k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Es gilt

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{4k}} + \frac{1}{\sqrt{4k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent nach dem Minorantenkriterium. Folglich ist auch die Folge (S_N) — also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — divergent. $\square$

Aufgabe 34:

(a) Sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge. Damit ist die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent nach dem Leibnizkriterium.

Da $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| \geq \frac{1}{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent nach dem Minorantenkriterium.

(b) Das Cauchyprodukt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \right)}_{=:b_n}.
\end{aligned}$$

Laut Hinweis ist

$$\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1} \leq \frac{n-k+1+k+1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

und folglich

$$|b_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \geq (n+1)\frac{2}{n+2} \geq \frac{2(n+1)}{2n+2} = 2.$$

Also ist (b_n) keine Nullfolge und somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent.

$\square$

Aufgabe 35:

(i) Sei $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$. Es gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(ii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} e^{4k} & \text{für } n = 4k, \\ 0 & \text{für } n = 4k+1, \\ 1 & \text{für } n = 4k+2, \\ 0 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = e$, $\sqrt[4k+1]{|a_{4k+1}|} = 0$, $\sqrt[4k+2]{|a_{4k+2}|} = 1$ und $\sqrt[4k+3]{|a_{4k+3}|} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und folglich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$.

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist $R = \frac{1}{e}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < \frac{1}{e}$ und divergent für $|z| > \frac{1}{e}$.

Für $|z| = e^{-1}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left| a_{4k} z^{4k} \right| = e^{4k} |z|^{4k} = e^{4n} e^{-4n} = 1.$$

Also ist $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ divergent.

(iii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k, \\ \frac{1}{(2k+1)!} & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$0 \le |a_n z^n| \le \frac{|z|^n}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Reihe $\sum_{n\ge 0} a_n z^n$ absolut konvergent ist für alle $z \in \mathbb{C}$ (Exponentialreihe — siehe Abschnitt 7.8 des Skriptes), ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ nach dem Majorantenkriterium.

(iv) Nach Aufgabe 21 (vi) ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard ist (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist $R = \frac{1}{\infty} = 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes, ist $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ genau für $z = 0$ konvergent (in diesem Fall ist sie natürlich absolut konvergent).

(v) Sei $(a_n) = \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{1-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach dem Satz aus Abschnitt 7.15 der Vorlesung ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ also für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt $a_n \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Da (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

□

Aufgabe 36:

(i) Definiere $w := \frac{z^2}{4}$ und $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n.$$

Ferner ist

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ absolut konvergent für $|w| < 1$ bzw. $|z| < 2$ und divergent für $|w| > 1$ bzw. $|z| > 2$.

Für $|w| = 1$ ist

$$|a_n w^n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|w| = 2$.

(ii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^m & \text{für } n = m^2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{|a_{m^2}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{2^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{2} = 1.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Deshalb ist $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ divergent.

(iii) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit $z_0 = 2\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{0} = \infty$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (absolut) konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

(iv) Sei $(a_n)_{n\geq 2} = \left(\frac{2n+1}{(n-1)^2}\right)_{n\geq 2}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n+1-1)^2}{2(n+1)+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach dem Satz aus Abschnitt 7.15 der Vorlesung ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes, ist die Potenzreihe also für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

für alle $n \geq 2$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Für alle $n \geq 2$ gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2(n+1)+1}{n^2} = a_{n+1}.$$

Ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

Also ist $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

(v) Sei $(a_n) = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. Es gilt $1 \leq n! \leq n^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$1 = \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n^n}}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}}_{=\sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (siehe Abschnitt 7.14 des Skriptes) ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach dem Satz im Abschnitt 7.14 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{n^n}} = 1$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| = 1$.